

فصل چهارم : مثلثات

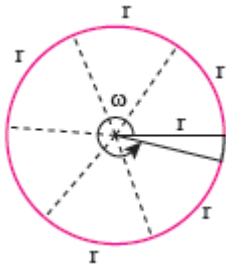
درس اول : رادیان

درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخطی زوایا

درس سوم : توابع مثلثاتی

درس چهارم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

درس اول : رادیان



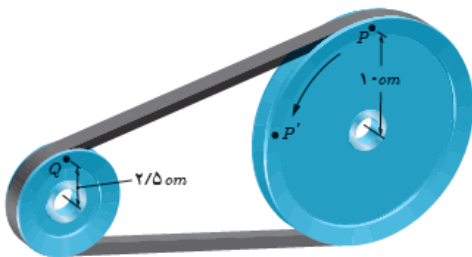
رادیان : اگر محیط یک دایره را به کمان هایی به اندازه شعاع قسمت کنیم ، زاویه مرکزی مقابل به این کمان ها برابر با یک رادیان خواهد بود . یک دایره کامل $2\pi \approx 6.28 \text{ rad}$ است .

نکته : اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان l در دایره ای به شعاع r برابر است با : $\theta = \frac{l}{r} \text{ rad}$

نکته : برای تبدیل درجه به رادیان و برعکس می توان از نسبت $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ استفاده کرد .

تمرین : شعاع یک زمین دو ۵۰۰ متر است ، اگر دایره ای زاویه مرکزی 70° درجه را بدود چند متر را طی خواهد کرد ؟

تمرین : در شکل زیر اگر قرقره بزرگ 50° درجه بپرخد قرقره کوچک چند رادیان می چرخد ؟

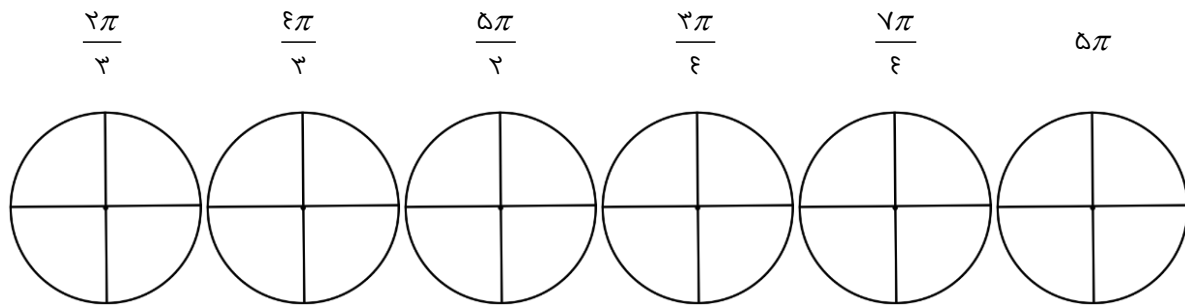


تمرین : اندازه زاویه های $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ را بر حسب رادیان بنویسید .

نسبت های مثلثاتی زاویه های اصلی :

نسبت \ θ (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinθ	0				1		
cosθ			$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
tanθ		$\frac{\sqrt{3}}{3}$					
cotθ	تعریف نشده				0		

تمرین : زاویه های زیر را در دایره های مثلثاتی داده شده به طور تقریبی نشان دهید .



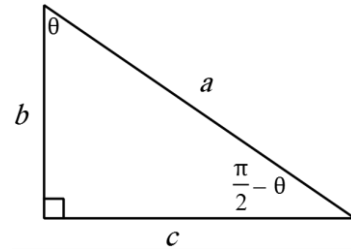
تمرین : تمرین های صفحه ۹۶ را حل کنید .

درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

نسبت های مثلثاتی زوایای متمم :

هرگاه مجموع دو زاویه ۹۰ باشد سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است .

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{b}{a} \\ \cos \theta &= \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$



به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad , \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$$

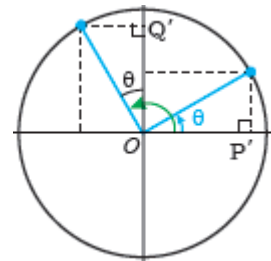
تمرین : نسبت های مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ را به کمک دایره مثلثاتی بدست آورید .

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$



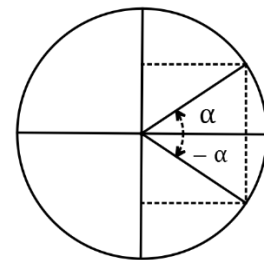
نسبت های مثلثاتی زوایای قریب :

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل :

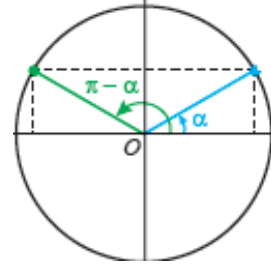
هرگاه مجموع دو زاویه 180° باشد سینوس یکی برابر با سینوس دیگری و نسبت های دیگر یکی برابر با قرینه همان نسبت زاویه دیگری است .

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$



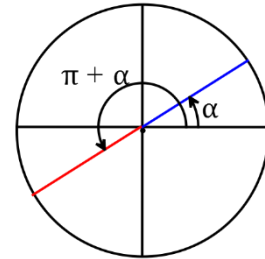
تمرین : مانند بالا نسبت های مثلثاتی زاویه $(\pi + \alpha)$ را بدست آورید .

$$\sin(\pi + \alpha) =$$

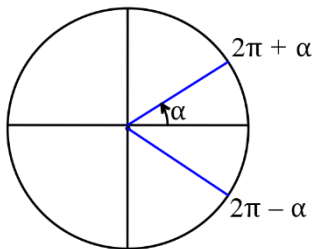
$$\cos(\pi + \alpha) =$$

$$\tan(\pi + \alpha) =$$

$$\cot(\pi + \alpha) =$$



نسبت های مثلثاتی زاویه های با مجموع یا تفاضل 2π رادین :



اگر 2π که یک دور کامل است به زاویه بیافزاییم مکان زاویه تغییر نمی کند پس :
نسبت های مثلثاتی زاویه $(2\pi + \theta)$ با نسبت های مثلثاتی متناظر θ برابر است .
نسبت های مثلثاتی زاویه $(2\pi - \theta)$ با نسبت های مثلثاتی متناظر θ برابر است .

نتیجه کلی : محاسبه نسبت های مثلثاتی کمان های $(k\pi \pm \alpha)$ و $(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$:

- ابتدا علامت نسبت مثلثاتی را در ربعی که کمان در آن قرار دارد را می نویسیم سپس :

- اگر کمان شامل ضرایب $\frac{\pi}{4}$ بود آن را حذف و نسبت را تغییر می دهیم ($\sin \longleftrightarrow \cos$, $\tan \longleftrightarrow \cot$)

- اگر کمان شامل ضرایب π بود آن را حذف کرده و نسبت را تغییر نمی دهیم .

تمرین: مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\cos \frac{2\pi}{3} =$$

$$\sin -\frac{5\pi}{4} =$$

$$\cot -\frac{4\pi}{3} =$$

$$\tan \frac{4\pi}{3} =$$

$$\cos -33^\circ =$$

$$\sin 85^\circ =$$

$$\cot 24^\circ =$$

$$\tan -15^\circ =$$

تمرین: ساده ترین صورت عبارت $A = \frac{3 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$ را بنویسید.

$$\text{تمرین: ساده ترین صورت عبارت } A = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + 5 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$$

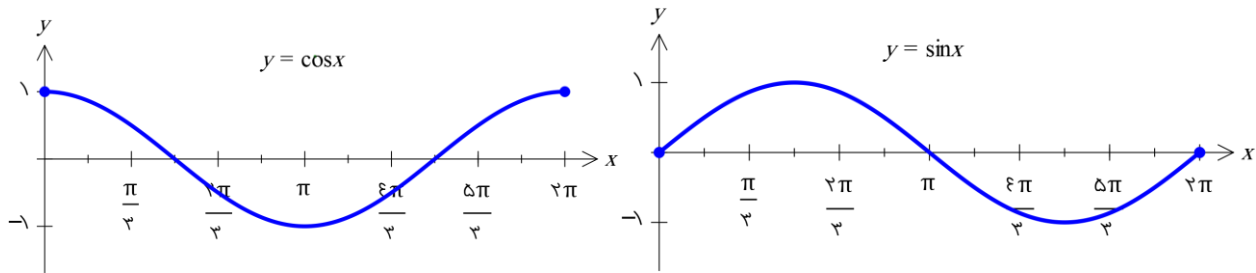
بنویسید.

$$\text{تمرین: حاصل عبارت } A = \frac{\sin 15^\circ + \cos 75^\circ + 1}{6 \cos 79.5^\circ + 3}$$

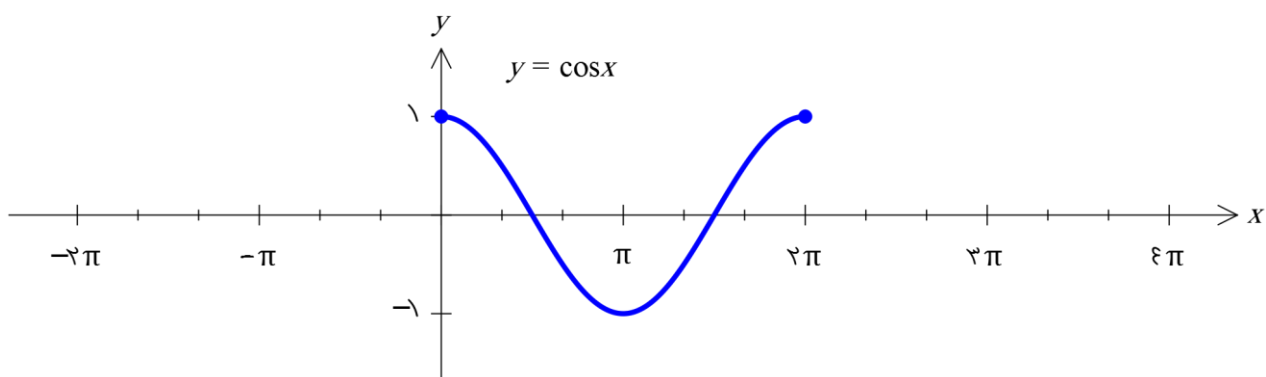
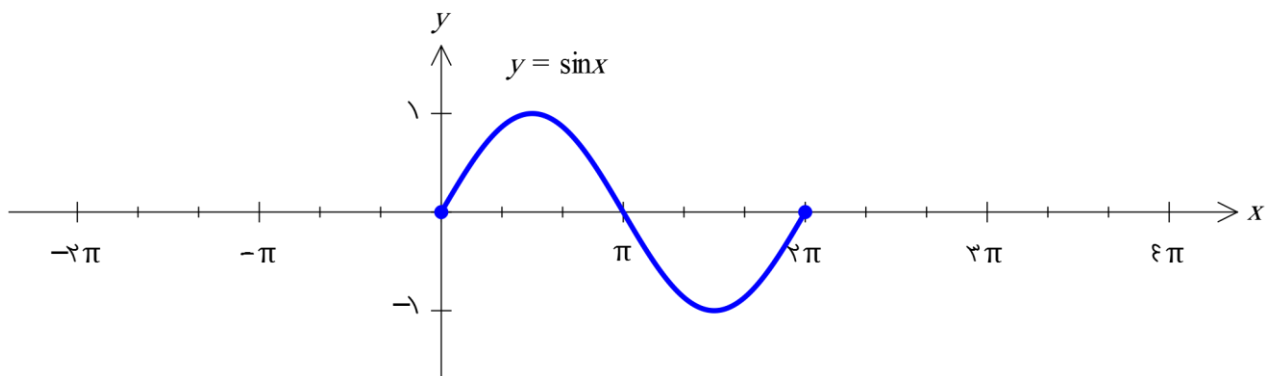
تمرین: تمرین های صفحه ۱۰۴ را حل کنید.

درس دوم : توابع مثلثاتی

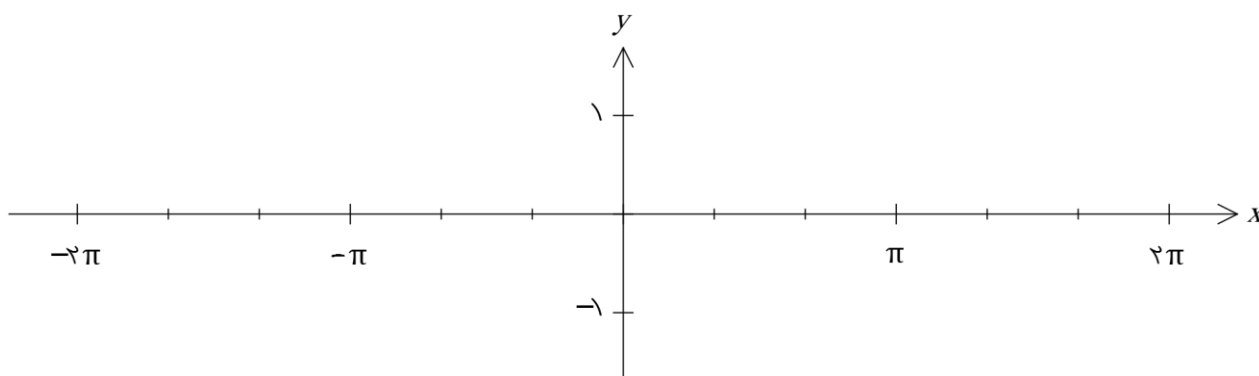
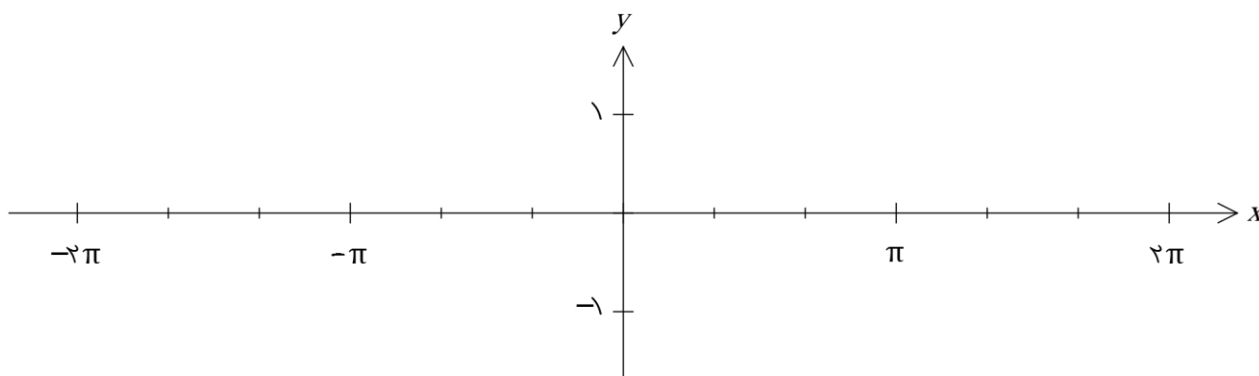
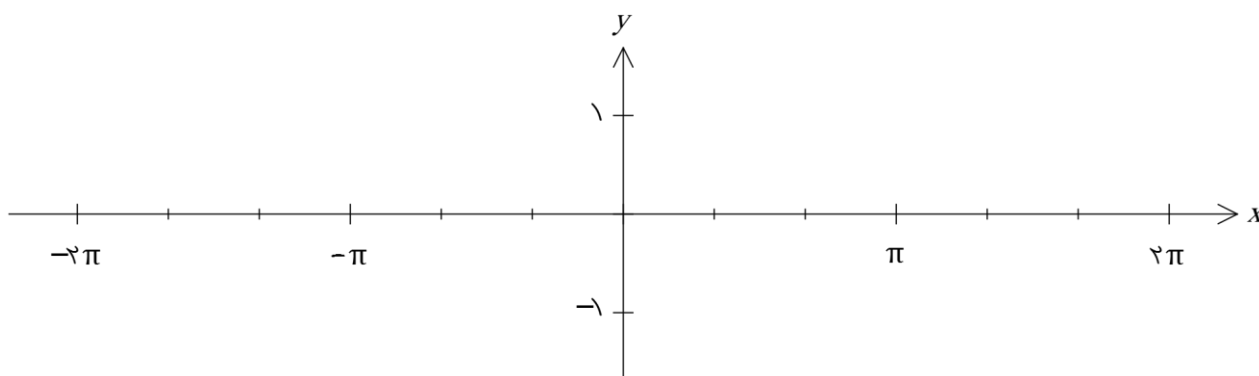
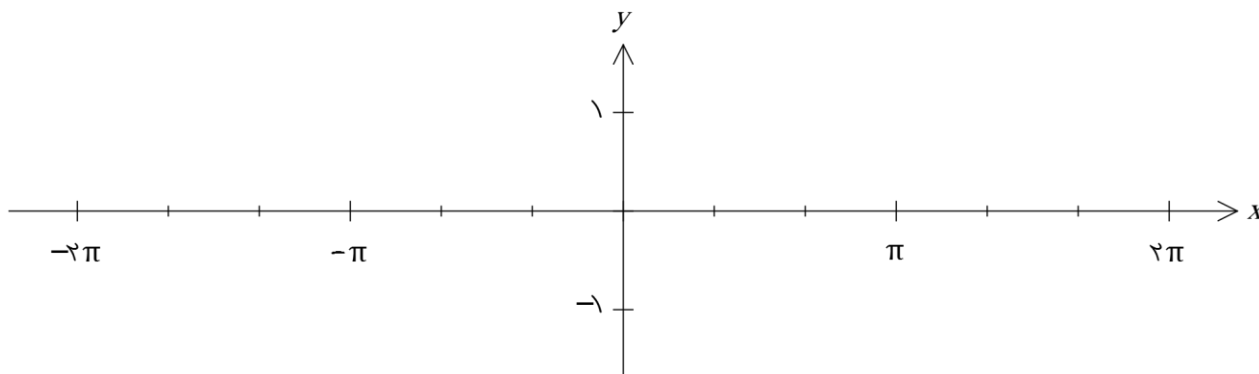
اگر x را مقادیر مختلف بر حسب رادیان در بازه $[0, 2\pi]$ در نظر بگیریم، به کمک نقطه یابی نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ به صورت زیر بدست می آیند. (توجه : در توابع مثلثاتی کمان بر حسب رادیان است مگر اینکه به وضوح اعلام شده باشد بر حسب درجه یا نوشته شود x°)



برد هر دو تابع $[-1, 1]$ است و به ازای هر زاویه ای مقدار این توابع نمی تواند از این محدوده تجاوز کند. حال با توجه به مطالب درس قبل که فهمیدیم $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ و $\sin(-x) = -\sin x$ و فهمیدیم $\cos(-x) = \cos x$ و $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ نمودار دو تابع سینوس و کسینوس را در دامنه \mathbb{R} رسم کنید.



تمرین: به کمک انتقال نمودار توابع $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $y = |\sin x|$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ و $y = -\cos x + 1$ را رسم کنید.



تمرین: اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ باشد و $\sin x = \frac{m-1}{4}$ ، محدوده m را مشخص کنید.

تمرین: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد.

ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است.

ج) $\cos 3 = \cos 3^\circ$.

د) اگر $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $-1 < \cos x < 1$.

ه) عددی می توان یافت که سینوس آن برابر -2 باشد.

و) $x = \pi$ صفر تابع $y = \cos x$ است.

تمرین: تمرین های صفحه ۱۰۹ را حل کنید.

درس سوم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

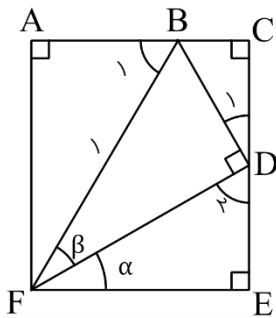
روابط مقدماتی : (یاد آوری از سال گذشته)

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$2) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \tan x \cot x = 1, \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$3) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

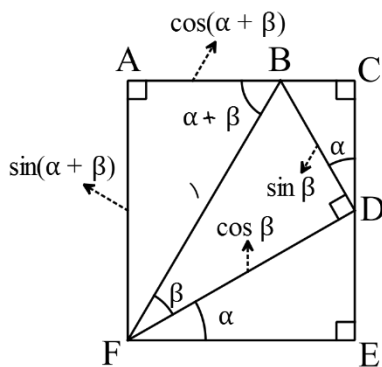
نسبت های مثلثاتی گمان های $(\alpha \pm \beta)$: (یافتن نسبت های زاویه های $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ$)



اگر دو زاویه α, β را به صورت زیر رسم کنیم به طوری که $FB = 1$ آنگاه :

$$\left. \begin{aligned} D_1 + D_2 &= 90^\circ \\ \alpha + D_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_1 = \alpha$$

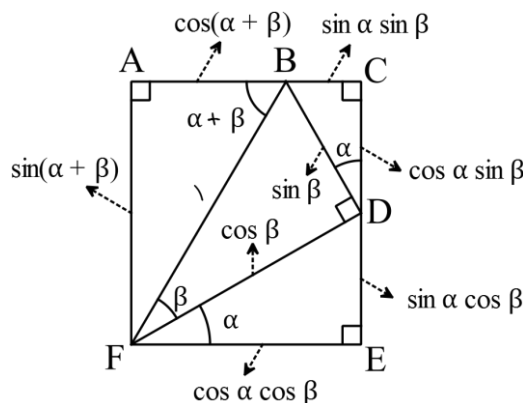
و طبق قضیه خطوط موازی : $B_1 = \alpha + \beta$



پس در مثلث های AFB و FBD که دارای وتر به طول 1 هستند می توان

طول اضلاع را به کمک مثلثات به صورت مقابل نوشت :

حال در دو مثلث BCD و FED با توجه به اندازه اضلاعی که مشخص شده است و به کمک مثلثات داریم :



حال با توجه به برابر بودن اضلاع مقابل در مستطیل داریم :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

حال اگر به جای β قرار دهیم $-\beta$ خواهیم داشت :

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

در نهایت داریم :

$$۱) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$۲) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$۳) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۴) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

بیشتر بدانیم :

$$۵) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۶) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

تمرین : مقدار $\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha$ را بر حسب کمان α بنویسید . (به این روابط نصف کمان می گویند)

تمرین: مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را حساب کنید.

$$\sin 105^\circ =$$

$$\cos 75^\circ =$$

$$\tan 15^\circ =$$

$$\cot \frac{\pi}{12} =$$

$$\sin 22/5^\circ =$$

تمرین: اگر $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ و $\sin \beta = \frac{5}{13}$ و α در ربع دوم و β در ربع اول باشد. مقدار $\sin(\alpha - \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ را بیابید.

تمرین: اگر α, β حاده و $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\sin \beta$ چقدر است؟

تمرین : حاصل $\frac{\cos 30^\circ \cos 40^\circ - \sin 30^\circ \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 30^\circ}$ چقدر است ؟

تمرین : مقدار عددی $A = \sin 3x \cos 3x + \sin 3x \cos 3x$ به ازای $x = \frac{\pi}{15}$ چقدر است ؟

تمرین : حاصل عبارت $A = \sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$ را بیابید . (راهنمایی : از ۲ فاکتور بگیرید)

تمرین : حاصل عبارت $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ بیابید .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۱۲ را حل کنید .