

## فصل اول جبر و احتمال

### درک شهودی

۲۵-نمره	خرداد ۹۲	۱ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. شهود می تواند یک ..... یا احساس بدون استدلال باشد.
---------	----------	--

### استدلال استقرایی

۲۵-نمره	شهریور ۸۹	۱ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. استدلال ..... ، روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه ی محدودی از مشاهدات است.
۲۵-نمره	دی ۹۱	۲ جای خالی را با یکی از کلمات ( شهودی ، تمثیلی ، استقرایی ، استنتاجی) کامل کنید. استدلال ..... ، روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه ی محدودی از مشاهدات است.

### استدلال استنتاجی

۱ نمره	خرداد ۸۵	۱ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح زوج متوالی مضربی از ۶ است.
۱ نمره	شهریور ۸۵	۲ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.
۷۵-نمره	دی ۸۵	۳ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب دو عدد فرد یک عدد فرد است.
۱ نمره	خرداد ۸۶	۴ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب هر سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.
۱ نمره	شهریور ۸۶	۵ به روش استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره فرد است.

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

۱ نمره	دی ۸۶	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم، عدد حاصل مضرب ۶ می باشد.	۶
۰/۷۵ نمره	خرداد ۸۷	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم، عدد زوج به دست می آید.	۷
۱ نمره	شهریور ۸۷	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ می باشد.	۸
۱ نمره	دی ۸۷	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید ۳ برابر مربع یک عدد فرد منهای ۳، مضرب ۱۲ است.	۹
۱ نمره	شهریور ۸۸	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد زوج متوالی، مضرب ۸ است.	۱۰
۱ نمره	خرداد ۸۹	با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر مربع های دو عدد فرد را از هم کم کنیم، حاصل عدد زوجی خواهد بود.	۱۱
۰/۲۵ نمره	شهریور ۸۹	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. هنگامی از استدلال ..... استفاده می کنیم که مطمئن هستیم، نتیجه ی مسئله همیشه درست است.	۱۲
۱ نمره	شهریور ۹۰	با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.	۱۳
۱ نمره	دی ۹۰	با استدلال استنتاجی، ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد فرد همواره مضرب چهار است.	۱۴
۱ نمره	شهریور ۹۱	با استدلال استنتاجی، ثابت کنید که اگر $x$ یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آنگاه $x(x + 3)$ مضرب ۱۸ است.	۱۵
۰/۲۵ نمره	دی ۹۱	جای خالی را با یکی از کلمات ( شهودی ، تمثیلی ، استقرایی ، استنتاجی) کامل کنید. استدلال ..... روش نتیجه گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم.	۱۶

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس جبر و احتمال پایه ی سوم رشته ی ریاضی فیزیک

۱ نمره	خرداد ۹۳	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است.	۱۷
۰/۷۵ نمره	دی ۹۳	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی همواره مضربی از ۳ است.	۱۸
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۴	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد یک واحد اضافه شود، عددی زوج بدست می آید.	۱۹

قضیه های شرطی

۰/۲۵ نمره	شهریور ۸۹	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. احکامی که همیشه برقرار هستند را ..... می نامند.	۱
--------------	--------------	--	---

مثال نقض

۰/۷۵ نمره	خرداد ۸۵	اگر $a$ و $b$ و $c$ سه عدد گنگ باشند، آیا $abc^2$ یک عدد گنگ است؟ چرا؟	۱
۱ نمره	شهریور ۸۵	کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید. الف : توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است. ب : اگر $x$ گنگ باشد، آنگاه $x^2$ گویا است.	۲
۰/۷۵ نمره	دی ۸۶	آیا حکم مقابل برقرار است؟ چرا؟ اگر $(a-1)(b-1) = 0$ آنگاه $a = 1$ و $b = 1$ می باشد.	۳
۰/۵ نمره	شهریور ۸۷	آیا حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است؟ چرا؟	۴

۵	دی ۸۷	آیا مجموع دو عدد گنگ ، همواره عددی گنگ است؟ چرا؟
۶	شهریور ۸۸	اگر $x$ گنگ باشد، آیا $x^2$ همواره گویا است؟ چرا؟
۷	شهریور ۸۹	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. مثال نقض ، مثالی است که نشان می دهد نتیجه ی کلی ..... است.
۸	شهریور ۹۰	اگر $n$ یک عدد طبیعی باشد، آیا $3^n + 4$ یک عدد اول است؟ چرا؟
۹	دی ۹۱	کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای عبارات های نادرست مثال نقض بیاورید. الف) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گویا است. ب) مربع هر عدد فرد به اضافه ی یک ، عددی زوج است. پ) برای هر عدد طبیعی $n$ حاصل $2^n + 3$ عددی اول است.
۱۰	دی ۹۲	برای احکام نادرست زیر مثال نقض بیاورید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ ، عددی گنگ است. ب) برای هر عدد طبیعی $n$ آنگاه $3^n + 2$ عددی اول است.
۱۱	خرداد ۹۳	درستی یا نادرستی حکم زیر را بنویسید. اگر نادرست است مثال نقض بیاورید. اگر $n^2$ مضرب ۳ باشد، آنگاه $n$ نیز مضرب ۳ است.
۱۲	شهریور ۹۰	درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را تعیین کنید. مثال نقض ، برای اثبات درستی یک قضیه ی کلی به کار می رود.
۱۳	دی ۹۳	قضیه ی شرطی « اگر $a$ و $b$ دو عدد گویا باشند، آنگاه $a + b$ گویا است.» را در نظر بگیرید. الف : عکس قضیه ی شرطی را بنویسید. ب : آیا عکس آن نیز یک قضیه ی شرطی است؟ چرا؟

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس جبر و احتمال پایه ی سوم رشته ی ریاضی فیزیک

۱۴	قضیه ی شرطی « اگر $x > 1$ آنگاه $ x  > 1$ است.» را در نظر بگیرید. الف : عکس قضیه ی شرطی را بنویسید. ب : آیا عکس آن نیز یک قضیه ی شرطی است؟ در صورت نادرستی، مثال نقض بیاورید.	خرداد ۹۴	نمره ۰/۷۵
----	---	----------	-----------

مشترک ( استدلال استنتاجی و مثال نقض )

۱	کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت درست بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید. الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچکتر است. ب) حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است.	شهریور ۸۶	نمره ۱/۲۵
۲	عبارت های زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی هر یک را بنویسید. الف) اگر $x > 1$ آنگاه داریم: $4 - x^2 < 3$ ب) مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.	خرداد ۸۸	نمره ۱/۲۵
۳	با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی هر یک را بررسی کنید: الف) برای هر عدد حقیقی $a$ ، داریم $a^2 < a^3$ ب) مقدار عبارت $2^n + 1$ برای هر عدد طبیعی $n$ ، همیشه عددی اول است. ج) حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $6k + 5$ به صورت $6k' + 1$ می باشد.	دی ۸۸	نمره ۲
۴	با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید: الف) توان سوم هر عدد حقیقی از توان دوم همان عدد بزرگتر است. ب) حاصل ضرب هر دو عدد گویا همیشه عددی گویا است. ج) اگر $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ و $y = 0$ .	دی ۸۹	نمره ۲
۵	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید: الف) به ازای هیچ دو عدد اول $a$ و $b$ ، عدد $a + b$ اول نیست. ب) اگر $x$ فرد باشد، آنگاه $x(x + 2)$ هم فرد می باشد.	خرداد ۹۰	نمره ۱/۵

۱۷۵ نمره	۹۱ خرداد	<p>۶ کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ ( با ذکر دلیل)</p> <p>الف) اگر <math>a</math> و <math>b</math> دو عدد صحیح و فرد به طوری که هر دو مضربی از ۵ باشند، آنگاه مجموع آنها مضرب ۱۰ است.</p> <p>ب) اگر <math>a</math> یک عدد حقیقی و <math>a^2 &gt; 0</math> آنگاه <math>a &gt; 0</math> است.</p> <p>پ) اگر <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> اعداد طبیعی باشند، آنگاه <math>b\sqrt{ac}</math> یک عدد گنگ است.</p>
۱۲۵ نمره	۹۳ شهریور	<p>۷ کدام یک از عبارات های زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.</p> <p>الف) ( توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است.</p> <p>ب) حاصل ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۸ است.</p>
۱۲۵ نمره	۹۴ شهریور	<p>۸ کدام یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.</p> <p>الف) اگر <math>x &gt; 2</math> ، آنگاه <math>x &gt; \frac{5}{2}</math></p> <p>ب) اگر <math>x</math> و <math>y</math> هر دو گویا باشند، آنگاه <math>x + y</math> گویا است.</p>

### برهان خلف

۱ نمره	۸۵ خرداد	<p>۱ اگر <math>n</math> عددی صحیح و <math>n^2</math> فرد باشد. نشان دهید <math>n</math> نیز فرد است.</p>
۱ نمره	۸۵ دی	<p>۲ می دانیم که <math>\sqrt{2}</math> عدد گنگ است، ثابت کنید عدد <math>x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}</math> گنگ است.</p>
۱ نمره	۸۶ خرداد	<p>۳ می دانیم که <math>\sqrt{5}</math> عدد گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عدد <math>x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}</math> نیز گنگ است.</p>
۱ نمره	۸۶ شهریور	<p>۴ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید، اگر <math>n^2</math> مضربی از ۵ باشد، <math>n</math> نیز مضربی از ۵ است.</p>

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس جبر و احتمال پایه ی سوم رشته ی فیزیک

۱ نمره	دی ۸۶	می دانیم که $\sqrt{7}$ عدد گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عدد $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ عددی گنگ است.	۵
۱ نمره	خرداد ۸۷	می دانیم $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند. نشان دهید عدد $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ نیز عددی گنگ است.	۶
۱ نمره	شهریور ۸۷	اگر $n^3$ مضرب ۵ باشد، نشان دهید $n$ نیز مضرب ۵ است؟ (برهان خلف)	۷
۱ نمره	دی ۸۷	اگر $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ دو عدد گنگ باشند. ثابت کنید $2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$ نیز عددی گنگ است. (برهان خلف)	۸
۱ نمره	خرداد ۸۸	با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ است، $2 + \sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.	۹
۱ نمره	شهریور ۸۸	با استدلال برهان خلف ثابت کنید که : اگر $x \neq 1$ و $\frac{y^3}{2x} = 4$ آنگاه داریم : $y \neq 2$ .	۱۰
۱ نمره	دی ۸۸	با برهان خلف ، ثابت کنید که عدد $2\sqrt{3}$ گنگ است.	۱۱
۱ نمره	خرداد ۸۹	$b$ عددی گویا و $\sqrt{5}$ عددی گنگ است، با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5} - b$ هم عددی گنگ است.	۱۲
۱/۲۵ نمره	شهریور ۸۹	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید که $\sqrt{3}$ گنگ است.	۱۳
۰/۷۵ نمره	دی ۸۹	با استدلال برهان خلف ثابت کنید، اگر $\sqrt{7}$ عدد گنگ و $x$ عدد گویا است آنگاه $x + \sqrt{7}$ عددی گنگ است.	۱۴

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

۱۵	شهریور ۹۰	اگر $n$ عدد طبیعی و $3n + 2$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف ، نشان دهید که $n$ نیز عددی فرد است.
۱۶	دی ۹۰	می دانیم که $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ اعدادی گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ نیز گنگ است.
۱۷	خرداد ۹۱	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید، اگر $n$ یک عدد طبیعی و $5n + 3$ زوج باشد، آنگاه $n$ یک عدد فرد است.
۱۸	شهریور ۹۱	می دانیم که $\sqrt{2}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{1} + \sqrt{2}$ نیز گنگ می باشد.
۱۹	دی ۹۱	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید، اگر $\sqrt{3}$ گنگ باشد، آنگاه $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.
۲۰	خرداد ۹۲	با استفاده از برهان خلف ، نشان دهید $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.
۲۱	شهریور ۹۲	با استفاده از برهان خلف ، نشان دهید، اگر $n^2$ عددی فرد باشد، آنگاه $n$ نیز فرد است.
۲۲	دی ۹۲	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید، اگر $\sqrt{3}$ گنگ باشد، آنگاه $2 + \sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.
۲۳	شهریور ۹۳	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید، اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی و $x \neq 3$ و $x + 4y^2 = 7$ ، آنگاه $y \neq -1$ است.
۲۴	دی ۹۳	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید، اگر $n$ عددی صحیح و $n^2$ عددی فرد باشد، آنگاه $n$ نیز فرد است.
۲۵	خرداد ۹۴	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید، اگر $x$ گویا و $y$ گنگ باشد، آنگاه $x + y$ گنگ است.



شهریور ۹۴	شماره - ۷۵	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید که با فرض صحیح بودن $n$ اگر $n^2$ زوج باشد، $n$ نیز زوج است.	۲۶
-----------	------------	--	----

### اثبات بازگشتی

شهریور ۸۵	شماره ۱	برای هر دو عدد حقیقی و مثبت $x$ و $y$ ثابت کنید. $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$	۱
دی ۸۵	شماره ۱	برای هر عدد حقیقی و مثبت $a$ ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \geq 2$	۲
خرداد ۸۶	شماره ۱	به روش بازگشتی ثابت کنید : $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۳
خرداد ۸۷	شماره ۱	اگر $a$ و $b$ دو عدد مثبت باشند، ثابت کنید. $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$	۴
خرداد ۸۸	شماره - ۷۵	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که : $a^2 + b^2 \geq -4(a+b+2)$	۵
خرداد ۸۹	شماره ۱	اگر $a$ عددی حقیقی و منفی باشد، آنگاه ثابت کنید : $a + \frac{1}{a} < 2$	۶
شهریور ۸۹	شماره ۱	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که رابطه ی زیر برقرار است: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	۷
دی ۸۹	شماره - ۷۵	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید رابطه ی زیر برقرار است: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$	۸

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

۱/۵ نمره	۹۰ خرداد	ثابت کنید اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند که $a + b > 0$ آنگاه رابطه ی زیر برقرار می باشد. $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab$	۹
۱ نمره	۹۰ دی	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید: $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$	۱۰
۰/۷۵ نمره	۹۱ خرداد	اگر $a$ و $b$ و $c$ سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$	۱۱
۱ نمره	۹۱ شهریور	اگر $a$ و $b$ اعداد حقیقی باشند، بطوری که $(ab < 0)$ . ثابت کنید : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$	۱۲
۱ نمره	۹۱ دی	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $2a^2 + b^2 + 1 \geq 2a(1 - b)$	۱۳
۱/۲۵ نمره	۹۲ خرداد	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید : $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۱۴
۱/۲۵ نمره	۹۲ شهریور	اگر $x$ عددی حقیقی و مثبت باشد، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x + \frac{1}{x} \geq 2$	۱۵
۱ نمره	۹۲ دی	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$	۱۶
۱/۲۵ نمره	۹۳ خرداد	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$	۱۷
۱ نمره	۹۳ شهریور	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: $a^2 + b^2 \geq 2(b - 1)$	۱۸

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس جبر و احتمال پایه ی سوم رشته ی فیزیک

۱۷۵-نمره	دی ۹۳	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی رابطه ی زیر را ثابت کنید:	۱۹
		$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$	
۱۷۵-نمره	خرداد ۹۴	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید:	۲۰
		$a^2 + 1 \geq b(2-b)$	
۱-نمره	شهریور ۹۴	با استفاده از اثبات بازگشتی، ثابت کنید، حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع ها آنها است.	۲۱

اصل استقرای ریاضی معمولی

۱۷۵-نمره	خرداد ۸۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:	۱
		$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n} \quad (n \in N)$	
۱۵-نمره	شهریور ۸۵	برای هر عدد طبیعی $n$ با استفاده از استقرای ریاضی درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید.	۲
		$(1 + \sqrt{2})^n \geq 1 + \sqrt{2}n \quad (n \in N)$	
۱۷۵-نمره	دی ۸۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:	۳
		$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad (n \in N)$	
۱۵-نمره	خرداد ۸۶	برای هر عدد طبیعی $n$ با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:	۴
		$5^n - 4n - 1$ بر عدد ۱۶ بخش پذیر است.	
۱۵-نمره	شهریور ۸۶	برای هر عدد طبیعی $n$ با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:	۵
		$3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3(n^2 + n)}{2}$	

۱/۷۵ نمره	دی ۸۶	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$	۶
۱/۵ نمره	خرداد ۸۷	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ عدد $P_n = 11^n - 1$ بر عدد ۱۰ بخش پذیر است.	۷
۱/۷۵ نمره	شهریور ۸۷	به روش استقرا ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $(1 + \sqrt{7})^n \geq 1 + n\sqrt{7}$	۸
۱/۷۵ نمره	دی ۸۷	به روش استقرا ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(1 - \frac{1}{16}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$	۹
۱/۵ نمره	خرداد ۸۸	با استفاده از استقرا ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$	۱۰
۱/۵ نمره	شهریور ۸۸	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$	۱۱
۱/۵ نمره	دی ۸۸	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، درستی رابطه ی زیر را برای هر عدد طبیعی $n$ ثابت کنید: $(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$	۱۲
۱/۵ نمره	خرداد ۸۹	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $(1 \times 3) + (2 \times 5) + (3 \times 7) + \dots + (n \times (2n+1)) = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{6}$	۱۳
۱ نمره	دی ۸۹	با استدلال استقراء ریاضی برای هر عدد طبیعی $n$ ، درستی رابطه زیر را ثابت کنید. $\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$	۱۴

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس جبر و احتمال پایه ی سوم رشته ی فیزیک

۱/۵ نمره	۹۰ خرداد	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید که رابطه ی زیر به ازای هر عدد طبیعی $n$ برقرار است: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$	۱۵
۱/۵ نمره	۹۰ شهریور	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید که رابطه ی زیر برقرار است. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	۱۶
۱/۵ نمره	۹۰ دی	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید که رابطه ی زیر برقرار است. $\frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \dots + \frac{1}{(2n+7)(2n+9)} = \frac{n}{9(2n+9)}$	۱۷
۱/۲۵ نمره	۹۱ خرداد	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$	۱۸
۱/۵ نمره	۹۱ شهریور	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $1 \times 2 + 2 \times 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$	۱۹
۱/۲۵ نمره	۹۱ دی	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2$	۲۰
۱/۵ نمره	۹۲ خرداد	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	۲۱
۱/۵ نمره	۹۲ شهریور	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	۲۲
۱/۵ نمره	۹۲ دی	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$	۲۳

شهریور ۹۳	شماره ۱/۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$	۲۴
دی ۹۳	شماره ۱/۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$	۲۵
شهریور ۹۴	شماره ۱/۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید $7^n - 1$ بر ۶ بخشپذیر است.	۲۶
خرداد ۹۴	شماره ۱/۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	۲۷

### اصل استقرای ریاضی تعمیم یافته

شهریور ۸۹	شماره ۱/۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ثابت کنید: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n$	۱
خرداد ۹۳	شماره ۱/۷۵	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n > 6$ ثابت کنید: $n! > 3^n$	۲

### اصل لانه کبوتری

خرداد ۸۵	شماره ۱	۱۰۰ طبیعی متمایز داریم، نشان دهید اگر این ۱۰۰ عدد را بر ۱۵ تقسیم کنیم، حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده ی یکسانی بر ۱۵ هستند.	۱
شهریور ۸۵	شماره ۱	برای اینکه در یک مدرسه دست کم ۶ دانش آموز در یکی از ماه های سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش آموز داشته باشد.	۲

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس جبر و احتمال پایه ی سوم رشته ی فیزیک

۱ نمره	دی ۸۵	۳ اگر ۱۰ نقطه داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد انتخاب شده باشد، ثابت کنید، حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از $\frac{1}{3}$ است.
۱ نمره	خرداد ۸۶	۴ درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می کنیم، ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه از ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.
۱ نمره	شهریور ۸۶	۵ شخصی برای مهمانی خود ۳۹ نفر را دعوت کرده است. حداقل چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آنها یک روز هفته است.
۱ نمره	دی ۸۶	۶ دبیرستانی ۴۰۰ دانش آموز دارد، حداقل چند نفر وجود دارند که روز تولدشان در هفته یکسان است؟
۱/۲۵ نمره	خرداد ۸۷	۷ ۵۰ ورزشکار مرد در رشته های فوتبال ، والیبال و بسکتبال از شهر های تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند.
۱/۲۵ نمره	شهریور ۸۷	۸ ۹ نقطه درون دایره ای به شعاع واحد انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از واحد را دارند.
۱/۲۵ نمره	دی ۸۷	۹ هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می کنیم. ثابت کنید، حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از $2\sqrt{2}$ متر را دارند.
۱ نمره	خرداد ۸۸	۱۰ هفت نقطه درون شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱ انتخاب می کنیم، ثابت کنید فاصله ی دست کم دو تا از این نقطه ها از ۱ کمتر است.
۱/۵ نمره	شهریور ۸۸	۱۱ شرکت کنندگان در یک آزمون ریاضی ۱۰۲۵ نفر می باشند. آیا حداقل دو شرکت کننده یافت می شود که حرف اول نام و نام خانوادگی آنها به زبان فارسی یکسان باشد؟ چرا؟
۱ نمره	دی ۸۸	۱۲ ۲۲ عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم می کنیم، نشان دهید حداقل ۴ عدد از آن ها باقی مانده ی مساوی خواهند داشت.

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

۱۳	در یک مهمانی ۳۹ نفر حضور دارند، حداقل چند نفر از آنها روز تولدشان در یک روز از هفته می باشد و چرا؟	خرداد ۸۹	انمره ۱
۱۴	اگر $A$ یک زیر مجموعه ی ۲۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اعضای $A$ را بر عدد ۲۶ تقسیم کنیم، نشان دهید که حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده ی یکسانی بر ۲۶ هستند.	شهریور ۸۹	نمره ۰/۲۵
۱۵	۱۰ نقطه را درون مربعی به ضلع واحد انتخاب می کنیم، ثابت کنید فاصله ی حداقل دو نقطه از آن ها کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.	دی ۸۹	انمره ۱
۱۶	$S$ یک زیر مجموعه ی ۶۵ عضوی از اعداد طبیعی است، اگر اعضای $S$ را بر عدد ۱۶ تقسیم کنیم، نشان دهید دست کم ۵ عضو از $S$ دارای باقیمانده ی یکسانی بر ۱۶ می باشند.	خرداد ۹۰	انمره ۱
۱۷	نشان دهید که اگر هر زیر مجموعه ی ۶ عضوی از مجموعه ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ باشد.	شهریور ۹۰	نمره ۱/۲۵
۱۸	گروه خونی دانش آموزان یک کلاس ۳۱ نفری، $A$ یا $B$ یا $O$ است، حداقل چند نفر از دانش آموزان گروه خونی یکسانی را دارند و چرا؟	دی ۹۰	انمره ۱
۱۹	۵۰ عدد طبیعی متمایز را در نظر گرفته و هر یک از این اعداد را بر عدد ۲۴ تقسیم کرده ایم، حداقل چند تا از آنها باقی مانده ی یکسانی را بر ۲۴ خواهند داشت و چرا؟	خرداد ۹۱	انمره ۱
۲۰	مدرسه ای ۶۰۱ نفر دانش آموز دارد، حداقل چند نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است و چرا؟	شهریور ۹۱	انمره ۱
۲۱	پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض اند، ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.	دی ۹۱	انمره ۱
۲۲	پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض اند، ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.	خرداد ۹۲	نمره ۱/۲۵



سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس جبر و احتمال پایه ی سوم رشته ی ریاضی فیزیک

۲۳	در یک کلاس ۳۰ نفری ، حداقل چند دانش آموز در یک روز هفته متولد شده اند، چرا؟	شهریور ۹۲	شماره ۱/۲۵
۲۴	پنج نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد مفروض اند، ثابت کنید، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از $\frac{1}{2}$ است.	دی ۹۲	شماره ۱
۲۵	یک مدرسه حداقل چه تعداد دانش آموز باید داشته باشد تا دست کم ۱۳ دانش آموز در یک ماه سال متولد شده باشند.	خرداد ۹۳	شماره ۰/۲۵
۲۶	$S$ یک زیر مجموعه ی ۴۰ عضوی از اعداد طبیعی است، اگر اعضای $S$ را بر عدد ۳۹ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده ی یکسانی بر ۳۹ هستند.	شهریور ۹۳	شماره ۱
۲۷	پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض اند، ثابت کنید، حداقل فاصله ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.	دی ۹۳	شماره ۱
۲۸	در یک کلاس ۳۰ نفر دانش آموز حضور دارند. حداقل چند نفر از دانش آموزان این کلاس در یک فصل از سال متولد شده اند، چرا؟	خرداد ۹۴	شماره ۰/۲۵
۲۹	مثلث متساوی الاضلاع $ABC$ به ضلع ۲ مفروض است. پنج نقطه را داخل مثلث در نظر می گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله ی آنها کمتر از یک است.	شهریور ۹۴	شماره ۱

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوّم استان خوزستان