مقدمه

ریاضیات عموما مطالعه الگوی ساختار، تحول، و فضا تعریف شده است؛ بصورت غیر رسمی تر، ممکن است بگویند مطالعهاعداد و اشکال است.تعریف ریاضیات بر حسب وسعت دامنهٔ آن و نیز بسط دامنهٔ فکر ریاضی تغییر کرده است .

ریاضیات زبانی خاص خود دارد،که در آن به جای کلمات و علائم نقطه گذاری از اعداد و نمادها استفاده میشود. در منظر صاحبان فکر، تحقیق بدیهیات ساختارهای مجرد تعریف شده، با استفاده از منطق و نماد سازی ریاضی میباشد .

نخستین اعداد ثبت شده خطوطی بودند که روی یک چوب کشیده میشدند،که اصطلاحا آنها را چوبخط مینامیدند.این خطوط به شکل دسته های کوچک دو یا پنج تایی کشیده میشدند.سرانجام به این دسته ها نمادهای خاصی اختصاص داده شد(۵،۲ و غیره)و یک دستگاه حساب ایجاد شد .

ریاضیدانان نمادهای خاصی را به جای کلماتی از قبیل به اضافه و مساوی است با وضع کردند،همچنین کلمات خاصی را برای بیان مفاهیم جدید ابداع کردند .

چنانکه زمانی آن ار علم عدد ، زمانی علم فضا ، گاه علم کمیات ، و زمانی علم مقادیر متصل و منفصل خوانده اند.ریاضیات درباره حساب ، هندسه ، جبر و

مقابله بحث می کند که ما در اینجا به سراغ تاریخ هر یک از آنها می رویم .

ساختارهای بخصوصی که در ریاضیات مورد تحقیق و بررسی قرار میگیرند اغلب در علوم طبیعی منشاء دارند، و بسیار عمومی در فیزیک، ولی ریاضیات ساختارهای دلایلی را نیز بررسی می نماید که بصورت خالص در مورد باطن ریاضی است، زیرا ریاضیات می توانند برای مثال، یک عمومیت متحد شده را برای زیر-میدانهای متعدد، یا ابزارهای مفید را برای محاسبات عمومی، فراهم نماید. در نهایت، ریاضیدانان بسیاری در مورد مطالبی که مطالعه می نمایند که منحصرا دلایل علمی محض داشته، ریاضیات را بصورت هنری برای پروراندن علم، صرف نظر از تجربی یا کاربردی، می نگرند .

حساب ، علم اعداد است. واژه انگلیسی حساب ، از کلمه ای یونانی به معنای اعداد گرفته شده است .

در آغاز شهرنشینی ، انسان گوسفندان ، گاوها و سایر حیوانات خود را با انگشتانش می شمرد. در واقع کلمۀ دیژیت که برای شمارش اعداد از ۰ تا ۹ به کار می رود، از یک کلمۀ لاتین به معنای انگشت گرفته شده است .

بعدها انسان با علامت زدن روی چوب یا درخت ، اشیاء را می شمرد .اما این روش به زودی جای خود را به استفاده از علامتهایی باری هر یک از اعداد داد .

هندسه مطالعه انواع مختلف اشکال و خصوصیات آنهاست. همچنین مطالعه ارتباط میان اشکال ، زوایا و فواصـــل است.

یک ویژگی عمده ریاضیات آن است که در همه علوم و شئون زندگی انسان کاربرد دارد؛ هر دانشی برای گسترش و پیشرفت خود به ریاضیات نیاز دارد. این نیاز خود موجبات گسترش شگفت انگیز ریاضیات را فراهم ساخته است و امروزه آنقدر شاخه‌های متعدد در ریاضیات پدید آمده است که هر ریاضیدان فقط در زمینه‌ای خاص دارای تخصص است. گونه‌ای تخصص بررسی اساس ریاضیات است و در این باره اختلاف نظرهایی وجود دارد که بر اثرآن ریاضیدانان به چند دسته اصولیون، شهودیون و... تقسیم می شوند. اختلاف نظرهای ریاضیدانان مربوط به اساس و زیربنای ریاضیات است. همه آنان در یک موضوع اتفاق نظر دارند و آن چگونگی ثابت قضیه‌های راضی است که استدلال ریاضی عنوان می‌شود. استدلال ریاضی همان روش استنتاج منطقی است. قاعده‌های مختلف استنتاج در قالب مفاهیم اختصاصی ریاضی ؛ استدلال ریاضی را تشکیل می‌دهند.

استدلال استقرایی و استقرای ریاضی

واقعیت این است که جرج بول (بوجود آورنده جبر بول و پدر ریاضی جدید) و همفکران او عضو کلوب اصلاح‌طلب‌ها بودند و در همین راستا حتی اسم

"ریاضیات" را هم به "ریاضی" تغییر دادند. ریاضی چیزی بالاتر از اثبات چند تا قضیه است. ریاضی (و علوم مکمل آن منطق، فلسفه و حکمت) بما یاد میدهد که منطقی بیندیشیم، از اظهارنظرهای نسنجیده و احساساتی دوری کنیم و هر حرفی را بدون دلیل و برهان قبول نکنیم. با اطلاع از اصول ریاضی و فلسفه (و صد البته با افزایش آگاهی) میتوان استدلال را از سفسطه تشخیص داد.

در منطق دو نوع کلی استدلال داریم :۱- استدلال استقرایی و ۲- استدلال قیاسی (یا استنتاجی).

اما تنها نوع استدلالی که ریاضیات می پذیرد و از آن استفاده می کند، استدلال قیاسی (استنتاجی)است.

یکی از انواع استدلال در منطق، استدلالی است که در آن از احکام جزئی و حالت های خاص، احکام کلی را استنباط می کنند. این چیزی است که "استدلال استقرایی" نامیده می شود. اما در ریاضی، ما چیزی به نام استدلال استقرایی نداریم بلکه روشی برای اثبات برخی از احکام در مورد اعداد طبیعی داریم که "استقراء ریاضی" نام دارد

این تفاوت در نام آنها نیست بلکه در واقع تنها شباهت آنها نام آنهاست.

"استقراء ریاضی" یک استدلال استقرایی نیست بلکه یکی از روش های بسیار قدرتمند و زیبای استدلال است که اتفاقا از نوع استدلال استنتاجی است. شاید دلیل نام گذاری این روش به این نام به دلیل اینست که ما ابتدا یک حکم را با امتحان کردن برای چند مورد حدس می زنیم. اما توجه داشته باشید که این، تنها قدم استقرایی است، و بقیه ماجرا که اثبات حکم با استفاده از روش "استقراء ریاضی" است از دو گام تشکیل شده که در هر دو گام از روشهای استنتاجی به کا می روند، و در آنها از هیچ نوع استدلال استقرائی استفاده نمیشود. ما در هر نظریه ریاضی احکامی داریم که بدون اثبات آن را می پذیریم و بر آنها نام "اصل موضوع" می نهیم. یکی از اصولی که در سراسر ریاضیات وجود دارد "اصل استقراء ریاضی" است که با استفاده از آن یک روش استدلالی قیاسی قدرتمند به نام "استقراء ریاضی" پدید آمده است.

اصل استقراء ریاضی: "اگر حکمی برای عدد طبیعی ۱برقرار باشد و نیز بتوانیم از فرض برقراری حکم برای عدد طبیعی k، برقراری آن برای عدد طبیعی k+۱ را نتیجه بگیریم، آنگاه حکم ما برای همه اعداد طبیعی(N) برقرار است".

تنها نوع استدلال در ریاضی، استدلال قیاسی است که البته روشهای مختلفی مانند " استقراء ریاضی"، "برهان خلف"، "برهان مستقیم"، "برهان بازگشتی " و ... دارد.

قاعده‌های استدلال ریاضی

برهان مستقیم

این روش استدلال که به آن قاعده استلزام نیز گفته می‌شود آن است که با استفاده از مفاهیم و قضیه‌هایی که ابتدا پذیرفته و ثابت شده‌اند، زنجیره‌ای از استلزامها چنان تشکیل دهیم که از روی آنها استلزامی بدست آید که فرض قضیه پیشامد (= مقدم) و حکم قضیه پس آنگاه (= تالی) آن باشد؛ اگر P فرض قضیه و Q حکم آن باشد و استلزامهای:

$$p, Q-2, ..., Q_n - 1_n, Q_n \text{text}$$

را داشته باشیم، بنا به قانون قیاس ، استلزام Pرا خواهیم داشت .

برهان مستقیم

برای اثبات اثبات قضیه‌هایی که به صورت شرط لازم و کافی بیان می‌شوند، روش کلی آن است که هم خود قضیه و هم عکس آن ثابت شود:

$$(P) \equiv (P) \wedge (Q) \text{text}$$

اما اگر بتوان زنجیره‌ای از هم ارزیها پدید آورد که از فرض شروع و به حکم پایان یابد، هم ارزی فرض و حکم ثابت شده است:

$$\text{text}(P) \Rightarrow \ldots) \leftrightarrow {}_{12}$$

برهان مستقیم شاخه‌ای

همواره نمی‌توان زنجیره‌ای استلزامها بوجود آورد که از فرض آغاز شود و به حکم پایان می‌یابد. اما اگر بتوان چند زنجیره از استلزامها تشکیل داد که بعضی از آنها از فرض یا از اجزاء فرض و بعضی از آنها قضیه‌های قبلی آغاز شوند به گونه‌ای که ترکیب آنها استلزامی بوجود آورد، که حکم قضیه پس آنگاه =) تالی) و فرض قضیه پیشامد (= مقدم) آن باشد، قضیه ثابت شده است .

برهان با استفاده از لم

واژه لم (Lemme) فرانسوی و می‌توان آن را قضیه کمکی یا پیش قضیه نامید. برای اثبات بیاری از قضیه‌ها ، نخست یک قضیه کمکی مطرح و اثبات می‌شود، آنگاه با استفاده از نتیجه این قضیه و فرض ، زنجیره استلزامها تشکیل می‌شود. گاهی به عنوان لم ذکر می‌شود اما در بیشتر موارد از ذکر این عنوان صرف نظر می‌شود .

برهان عکس نقیض

استلزام Pبا عکس نقیض آن $\sim Q \Rightarrow$ هم ارز است .بنابراین برای اثبات یک قضیه می‌توان عکس نقیض آن قضیه را ثابت کرد .

برهان خلف

برهان خلف نوعی از برهان غیر مستقیم است؛ برای آنکه ثابت کنیم قضیه‌ای درست است می‌توانیم ثابت کنیم که خلاف آن قضیه، یعنی ناارز (= نقیض) آن نادرست است. خلاف قضیه $(P$ می‌شود $(P \wedge)$ و برای اثبات نادرستی $(P \wedge)$ برهان را از خلاف حکم قضیه ، آغاز می‌کنیم و زنجیره‌ای از استلزامها تشکیل می‌دهیم که به تعارض برخورد کند، یا نتیجه آن خلاف فرض ، خلاف یکی از قضیه‌های قبلا ثابت شده یا خلاف یکی از اصول پذیرفته باشد و در این صورت نادرستی $(P \wedge)$ و در نتیجه درستی P ثابت شده است .

می خواهیم نشان دهیم که " اگر A آنگاه B ". برای این کار فرض میکنیم خلاف این حکم درست باشد (فرض خلف). یعنی فرض می کنیم که " گزاره A درست و گزاره B غلط است." . حالا باید به دنبال یک تناقض بگردیم. این تناقض ممکن است، با فرض قضیه و یا یک حکم بدیهی که از درستی آن مطلع هستیم ولی در فرض مسئله نیست، ایجاد شود. مثلا به این حکم برسیم که ۳ کوچکتر از ۰ است (تناقض با یک دانسته بدیهی). خوب! به محض اینکه به یک تناقض رسیدیم، نتیجه می گیریم که چیزی که فرض کردیم (فرض خلف) غلط

بوده، پس قضیه درسته.

قضیه ۳: n و m را اعدا صحیح در نظر میگیریم. اگر n.m زوج باشد، حداقل یکی از اعداد n یا m ، زوج است.

اثبات: فرض میکنیم که "n.m زوج است (A) ولی نه m و نه n هیچکدام زوج نیستند (Not B)" (فرض خلف). بنابرای ما می توانیم بنویسیم:

عددیهای صحیح k و c وجود دارن که : =۱k+۲n و =۱c+۲m . در نتیجه:

k.c + k ۲(۲= ۱c +۲k + ۲ + k.c ۴) = ۱c+۲)(۱k+۲n.m = (

۱+ c) +

که نشان می دهد فرد است از آنجایی که این یک تناقض (با فرض) است، نتیجه میگیریم n.m که قضیه درست است.

نکته: این یه نکته کوچولو رو داشته باشید که درستی این روش بر اساس قانونِ "طردِ شِقِ وسط " است. این قانون میگه که یک گزاره یا درسته و یا غلط و حالت بینابین یا حالت سومی نداره. این روش اثبات تنها در منطق دو ارزشی پذیرفتنی است. (نگران نباشید. این یعنی تقریبا همه جای ریاضی ای که ما می خوانیم به جز جایی که دقیقا در زمینه منطق های چند ارزشی صحبت میشه.) در این روش میگیم: چون فرض غلط بودن حکم به تناقض می رسه، پس غلط نیست، پس درسته. چون نمیتونه نه درست باشه نه غلط.

نمونه خلاف

هرگاه قضیه‌ای با سور عمومی یا با سور هیچ بیان شده باشد و موردی مشاهده شود که قضیه درست می‌باشد، آن قضیه نادرست است .

برهان از راه تعمیم

یک ویژگی ریاضیات آن است که احکام را به گونه کلی و عمومی بیان می‌کند. در هندسه وقتی بخواهند یک ویژگی مربوط به شکلی ، مثلا مثلث ، را ثابت کنند آن شکل را به گونه کلی و نه به گونه شکلی که اجزا آن مقادیر معلوم باشند، در نظر می‌گیرند. در حساب و جبر و سایر شاخه‌های ریاضی نیز همین روش را بکار می‌برند؛ برای آن که رابطه‌ای مربوط به یک یا چند مقدار را ثابت کنند، آن مقدار یا مقدارها را به صورت کلی و به گونه متغیر در نظر می‌گیرند و رابطه را درباره این متغیر یا متغیرها ثابت می‌کنند. به عبارت دیگر ، برای آنکه حالت خاص یک ویژگی را ثابت کنند حالت کلی آن را ثابت می‌کنند که شامل حالت خاص نیز هست .

برهان به کمک فرمول

اینگونه برهان گونه‌ای از قاعده استنتاج تخصیص است .هرگاه یک ویژگی از راه تعمیم یعنی به صورت کلی ثابت شده و نتیجه آن به صورت یک فرمول بیان شده باشد، در هر حالت خاص فقط از این فرمول استفاده می‌کنیم .

قاعده تبدیل متغیر

در یک فرمول یا در قسمتی از آن می‌توان به جای یک متغیر آن را قرار داد یا اینکه در تمام یک فرمول می‌توان متغیری را با متغیر دیگر جانشین کرد .

قاعده برگشت

از این روش برهان بیشتر درباره قضیه‌های مربوط به عددهای طبیعی استفاده می‌شود: اثبات خاصیتی مربوط به یک عدد طبیعی را به عدد قبل از آن ، سپس به عدد قبل از عدد دوم مربوط می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم تا به عددی برسیم که خاصیت در مورد آن صادق است. قاعده برگشت ممکن است با برهان مستقیم یا برهان خلف انجام گیرد .

استفاده از رابطه برگشت

گونه قاعده برگشت استفاده از رابطه برگشت است. در یک دنباله از اعداد ، رابطه بین هر جمله با جمله‌های قبل را رابطه برگشت می‌نامند .مثلا در دنباله عددهای طبیعی رابطه برگشت این است که هر جمله برای با جمله قبلی به اضافه یک است. از رابطه برگشت برای اثبات بسیاری از ویژگیهای دنباله‌های اعداد و همچنین در عملیات مربوط به اعداد استفاده می‌شود .

قاعده افنا

این روش که حالت خاص برگشت است بیشتر درباره قضیه‌های مربوط به حد بکار می‌رود. برای اثبات خاصیتی مربوط به یک تغییر در ازای یک مقدار که حد آن متغیر است آن اثبات به ازای مقداری نزدیکتر به آن حد برگشت داده می‌شود؛ به این ترتیب که مقادیری را که متوالیا به مقدار حدی نزدیکتر هستند برای متغیر در نظر می‌گیرند و ثابت می‌کنند که در ازای هر یک از این مقادیر ، خاصیت مورد نظر برقرار است .

استقراء ریاضی

استقراء ریاضی نوع مهمی از قاعده برگشت است که بر پایه اصل پنجم از اصول پئانو مربوط به بنای حساب انجام می‌گیرد. این روش غیر از استقراء است که روش علوم تجربی است. اثبات از راه استقراء ریاضی بیشتر در مورد قضیه‌های مربوط به عددهای طبیعی انجام می‌گیرد .روش اثبات با استقراء ریاضی از این قرار است:

برای آنکه ثابت کنیم $P(n)$ که n عدد طبیعی است، همواره درست است؛ نخست ثابت می‌کنیم که اگر n_0کوچکترین عدد طبیعی باشد که توان بجای n قرار داد، که معمولا $n_0 = 1$انتخاب می‌شود، $P(n_0)$درست است؛ آنگاه ثابت می‌کنم که اگر $P(k)$درست باشد $P(k+1)$نیز درست است؛ در این صورت بنا به اصل پئانو نتیجه می‌شود که $P(n)$به ازای هر n درست است .

مغالطه‌های ریاضی

مغالطه عبارت است از استدلالی نادرست که در ظاهر درست می‌نماید و قضیه‌ای نادرست را به صورت قضیه‌ای درست، یا اینکه قضیه‌ای درست را به صورت قضیه‌ای نادرست جلوه‌گر می‌سازد .مغالطه‌های ریاضی یا همان مغالطه‌های منطقی هستند که در قالب عبارت های ریاضی بیان شده‌اند، یا اینکه از بی توجهی به نکته ای در روش استدلال ریاضی ناشی شده‌اند. مثلا بیشتر از مغالطه‌های ریاضی نمونه استنتاج نادرست $ab = 0 = 0$ هستند که این استنتاج نادرست خود نمونه ای از مغالطه منطقی (P) است درست آن است که داشته باشیم $ab = 0, b \neq 0 = 0$ که نمونه قانون $([(p) \wedge])$ است و هر گاه شرط $b \neq 0$ در نظر گرفته شود، نتیجه نادرست به دست می‌دهد. مغالطه‌های ریاضی را به عنوانهای پارادوکسهای ریاضی ، معماهای ریاضی ، تفریحات ریاضی و غیره معرفی می‌کنند .

رد کردن یک حکم با مثال نقض (DISPROOF BY COUNTEREXAMPLE):

گاهی لازم است نشان دهیم که یک حکم غلط است. برای نشان دادن اینکه یک "حکم" غلط است، یکی از ملزومات آوردن یک مثال نقض است. مثال زیر را ملاحظه فرمائید:

قضیه ۵ (اشتباه): به ازای هر n صحیح، $n^۳$ زوج است.

اثبات اشتباه بودن: یک مثال نقض مورد n=۷ است. زیرا ۲۱=۷×۳ زوج نسیت.

توجه کنید که در بعضی موارد یک حکم ممکن است برای بسیار و یا حتی بینهایت مورد درست باشد و حتی در بعضی موارد آوردن مثال نقض بسیار سخت است. مثلا در مورد حدس گلدباخ با آنکه اثبات کاملی برای آن ارائه نشده (نکنه شده من نمی دونم) اما تا به حال مثال نقضی هم برای آن پیدا نشده است.حدس گلدباخ: هر عدد صحیح زوج بزرگتر از ۲، مجموع دو عدد اول است.

هندسه

واژه انگلیسی Geometry (هندسه) از زبان یونانی ریشه گرفته است.

این کلمه از دو کلمه «جئوٍ« به معنای زمین و «متری» به معنای اندازه گیری تشکیل شده است.بنابراین هندسه اندازه گیری زمین است. مصریان اولیه نخستین کسانی بودند که اصول هندسه را کشف کردند. هر سال رودخانۀ نیل طغیان نموده و نواحی اطراف رودخانه راسیل فرا می‌گرفت .

این عمل تمام علایم مرزی میان تقسیمات مختلف را از بین می‌برد و لازم می‌شد دوباره هر کس زمین خود را اندازه‌گیری و مرزبندی نماید. آنها روشی از علامت‌گذاری زمین‌ها با کمک پایه‌ها و طناب‌ها اختراع کردند. آنها پایه‌ای را

در نقطه‌ای مناسب در زمین فرو می‌کردند، پایه دیگری در جایی دیگر نصب می‌شد و دو پایه توسط طنابی که مرز را مشخص می‌ساخت به یکدیگر متصل می‌شدند.با دو پایه دیگر زمین محصور شده ، محلی برای کشت یا ساختمان سازی می‌گشت .

با برآمدن یونانیان اطلاعات ریاضی قدم به مرحله ای علمی گذاشت.در آغاز تمام اصول هندسی ابتدایی بود. اما در سال ۶۰۰ قبل از میلاد مسیح ، یک آموزگار یونانی به نام تالس، اصول هندسی را از لحاظ علمی ثابت کرد .

تالس دلایل ثبوت برخی از فرضیه‌ها را کشف کرد و آغازگر هندسهٔ تشریحی بود. اما دانشمندی به نام اقلیدس که در اسکندریه زندگی می‌کرد ، هندسه را به صورت یک علم بیان نمود .

وی حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد مسیح ، تمام نتایج هندسی را که تا به حال شناخته بود ، گرد آورد و آنها را به طور منظم ، در یک مجموعهٔ ۱۳ جلدی قرار داد. این کتابها که اصول هندسه نام داشتند ، به مدت ۲ هزار سال در سراسر دنیا برای مطالعه هندسه به کار می رفتند .

براساس این قوانین ، هندسه اقلیدسی تکامل یافت. هر چه زمان می گذشت ، شاخه های دیگری از هندسه توسط ریاضیدانان مختلف ، توسعه می یافت .

امروزه در بررسی علم هندسه انواع مختلف این علم را نظیر هندسهٔ تحلیلی و مثلثات، هندسه غیر اقلیدسی و هندسه فضایی مطالعه می کنیم .

خدمت بزرگی که یونانیان در پیشرفت ریاضیات انجام دادند این بود که آنان احکام ریاضی را به جای تجربه بر استدلال منطقی استوار کردند.قبل از اقلیدس، فیثاغورث ۵۰۰-۵۷۲)ق.م) و زنون ۴۹۰) ق.م.) نیز به پیشرفت علم ریاضی خدمت بسیار کرده بودند .

در قرن دوم قبل از میلاد ریاضیدانی به نام هیپارک، مثلثات را اختراع کرد. وی نخستین کسی بود که تقسیم بندی معمولی بابلی ها را برای پیرامون دایره پذیرفت.به این معنی که دایره را به ۳۶۰ درجه و درجه را به ۶۰ دقیقه و دقیقه را به ۶۰ قسمت برابر تقسیم نمود و جدولی براساس شعاع دایره به دست آورد که وترهای بعضی قوس‌ها را به دست می داد و این قدیمی ترین جدول مثلثاتی است که تاکنون شناخته شده است .

بعد از آن دانشمندان هندی موجب پیشرفت علم ریاضی شدند. در قرن پنجم میلادی آپاستامبا، در قرن ششم ، آریاب هاتا ، در قرن هفتم ،براهماگوپتا و در قرن نهم ،بهاسکارا در پیشرفت علم ریاضی بسیار مؤثر بودند.

کلاس‌بندی هندسه

هنــدسه مقــدماتی به دو شاخه تقسیــم می گردد :

- **هنــدسه مسطحه**
- **هندسه فضایی**

در هندسه مسطحه ، اشکالی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که فقط دو بعد دارند، هندسه فضایی ، مطالعه اشکال هندسی سه بعدی است. این بخش از هندسه در مورد اشکال سه بعدی چون مکعب ها ،استوانه ها، مخروط ها، کره ها و غیره است.

در هندسه مدرن شاخه‌های زیر مورد مطالعه قرار می‌گیرند :

- **هندسه تحلیلی**
- **هندسه برداری**
- **هندسه دیفرانسیل**
- **هندسه جبری**
- **هندسه محاسباتی**
- **هندسه اعداد صحیح**
- **هندسه اقلیدسی**
- **هندسه نااقلیدسی**
- **هندسه تصویری**
- **هندسه ریمانی**
- **هندسه ناجابجایی**
- **هندسه هذلولوی**

هندسهٔ اقلیدسی

هندسهٔ اقلیدسی به مجموعهٔ گزاره‌هایِ هندسی‌ای اطلاق می‌شود که به بررسی موجودات ریاضیاتی مثل نقطه و خط می‌پردازد و بر پایه‌هائی که اقلیدس ریاضی‌دان یونانی در کتاب خود به‌نام اصول عرضه کرده، بنا شده است. این قضایایِ هندسی عمدتاً توسطِ یونانیانِ باستان کشف و توسطِ اقلیدسِ اسکندرانی گردآوری شده‌اند و بخش بزرگی از آن همان است که در دبیرستان‌ها تدریس می‌شود. کتابِ «اصولِ» اقلیدس یکی از بزرگ‌ترین و تأثیرگذارترین کتاب‌ها چه بلحاظِ محتوا و چه از نظرِ روشِ اصلِ موضوعه‌ای‌اش بوده است. تا قرن نوزدهم میلادی هر وقت از هندسه سخن می‌رفت منظور هندسه اقلیدسی بود. بررسی مفاهیم هندسه اقلیدسی در دو بعد را «هندسه مسطحه» و در سه بعد «هندسه فضائی» می‌نامند. این مفاهیم را به ابعاد بالاتر از سه نیز می‌توان تعمیم داد و همچنان آن را هندسه اقلیدسی نامید.

در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد دنیای هندسه در تب و تاب بود. نظرات مختلفی در زمینهٔ هندسه وجود داشت و سرانجام اقلیدس با انتشار کتاب اصول بنیادی را بنا نهاد که تا قرن‌ها منسجم‌ترین بنیادهای نظری بشر محسوب می‌شود. روش اقلیدس ساده بود او چند اصل موضوع و چند اصل

متعارف را بدون اثبات به عنوان اصول بدیهی پذیرفت و سپس بر اساس آن صدها قضیه دیگر را اثبات کرد که بیشتر آن‌ها بسیار دور از ذهن بودند.

اقلیدس شاگرد مکتب افلاطون بود. او در اصول سیزده جلدی خود تمام دانش بشری تا آن زمان گرد آورد و به مدت دو هزار سال مرجعی بی‌بدیل باقی ماند. روش بنداشتی (اصل موضوع) اقلیدس منجر به کاربرد الگویی شد که امروزه به آن ریاضیات محض می‌گوییم. محض از این نظر که با اندیشهٔ محض سر و کار دارد و از راه آزمون خطا و تجربه به دست نمی‌آید و درستی یا نادرستی احکام آن را نیز از راه تجربه نمی‌توان اثبات یا نفی کرد. برای استفاده از روش بنداشتی یا اصل موضوع دو شرط را باید پذیرفت:

- شرط اول: پذیرفتن احکامی به نام بنداشت یا اصل موضوع که به هیچ توجیه دیگری نیاز نداشته باشند.
- شرط دوم: توافق بر این‌که کی و چگونه حکمی "به طور منطقی" از حکم دیگر نتیجه می‌شود، یعنی توافق در برخی قواعد استدلال.

کار عظیم اقلیدس این بود که چند اصل ساده، چند حکم که بی‌نیاز به توجیهی پذیرفتنی بودند دست‌چین کرد، و از آن‌ها ۴۶۵ گزاره نتیجه گرفت. زیبایی کار اقلیدس در این است که این همه را از آن اندک نتیجه گرفت.

تمامِ هندسهٔ اقلیدسی می‌توانند از پنج اصلِ موضوعهٔ زیر استخراج شوند:

۱. از هر دو نقطه یک خطِ راست می‌گذرد.

۲. هر پاره‌خط را می‌توان تا بینهایت رویِ خطِ راست امتداد داد.

۳. با یک نقطه به عنوانِ مرکز و یک پاره‌خط به عنوانِ شعاع می‌توان یک دایره رسم نمود.

۴. همهٔ زوایایِ قائمه با هم برابر اند.

۵. اگر یک خط دو خطِ دیگر را قطع کند، آن دو خط در طرفی که جمعِ زوایایِ داخلیِ تولید شده توسطِ خطِ مورب کم‌تر از دو قائمه است به هم می‌رسند (اگر ادامه داده شوند).[۱]

برایِ بیانِ این اصولِ موضوعه به مفاهیمی مانندِ نقطه و خط نیاز داریم. همان‌طور که باید چند گزاره را بدونِ اثبات بپذیریم تا بقیهٔ گزاره‌ها استخراج شوند لازم است چند مفهوم را نیز بدونِ تعریف بپذیریم. به این مفاهیم «تعریف‌نشده‌ها» می‌گویند. همان‌طور که دیده می‌شود اصولِ هندسهٔ اقلیدسی به جز اصلِ پنجم بسیار ساده و بدیهی به نظر می‌آیند. به همین‌دلیل از زمانِ اقلیدس ریاضیدانانِ بیشماری در شرق و غرب (من‌جمله خیام ریاضیدانِ ایرانی) تلاش کرده‌اند اصلِ آزاردهندهٔ پنجم را به اثبات برسانند. این کار همواره شکست خورده است. سپس برخی ریاضیدانان تلاش نمودند خلافِ اصلِ پنجم را فرض کنند تا ببینند آیا هندسه‌ای متناقض پدید می‌آید یا نه. از آن‌جا که هیچ تناقضی در هندسه‌هایِ دارایِ اصلِ پنجمِ متفاوت دیده نشد به

آن‌ها نامِ هندسه نااقلیدسی را دادند. در نتیجه این مسأله مطرح گردید که تجربه کدام هندسه را تأیید می‌کند. نظریهٔ نسبیت عام به این پرسش پاسخ می‌دهد.

اصول متعارفی

۱. دو مقدار مساوی بامقدار سوم با هم مساوی اند.
۲. اگر به دو مقدار مساوی مقادیر مساوی اضافه کنیم، حاصل جمع‌ها با هم مساوی اند.
۳. اگر از دو مقدار مساوی مقادیر مساوی کم کنیم، باقیمانده‌ها با هم مساوی اند.
۴. دو چیز قابل انطباق با هم برابر اند.
۵. کل از جزء بزرگ‌تر است.

هندسه‌های نااقلیدسی از مطالعهٔ عمیق‌تر موضوع توازی در هندسهٔ اقلیدسی پیدا شده‌اند. دو نیم‌خط موازی عمود بر پاره خط PQ را در نمودار شماره ۱ در نظر بگیرد. در هندسهٔ اقلیدسی فاصلهٔ (عمودی) بین دو نیم‌خط هنگامی که به سمت راست حرکت می‌کنیم فاصلهٔ p تا Q باقی می‌مانند؛ ولی در اوایل سدهٔ نوزدهم دو هندسه‌ی دیگر پیشنهاد شد. یکی هندسهٔ هذلولوی (از کلمهٔ یونانی هیپربالئین به معنی "افزایش یافتن") که در آن فاصلهٔ میان نیم‌خط‌ها افزایش می‌یابد و دیگری هندسهٔ بیضوی (elliptic geometry) (از کلمهٔ یونانی ایپلن "کوتاه شدن") که در آن فاصله رفته رفته کم می‌شود و سرانجام نیم‌خط‌ها هم‌دیگر را می‌برند. این هندسهٔ نااقلیدسی بعدها توسط ک.ف. گاوس و گ. ف. ب. ریمان در قالب هندسهٔ کلی‌تری بسط داده شدند. (همین هندسهٔ کلی‌تر است که در نگرهٔ نسبیت عام اینشتاین مورد استفاده قرار گرفته است.)