

## کسرهای مصری

نوشتن یک عدد گویا به صورت کسرهای مصری، نوشتن آن عدد به صورت مجموعی از کسرهایی است که صورت

آن کسرها ۱ و مخرج شان یک عدد طبیعی است به طوری که مخرج کسرها تکراری نباشند. به عنوان مثال  $\frac{43}{48}$  را می توان به صورت  $\frac{1}{16} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  نمایش داد.

سؤالی که در اینجا می توان مطرح کرد این است که آیا هر عدد گویایی را می توان به صورت کسرهای مصری نوشت؟ پاسخ این سؤال مثبت است. یعنی هر عدد گویایی را می توان به صورت کسرهای مصری نوشت.

فیوناچی<sup>۱</sup> روش «حریصانه» را ارائه کرد و به وسیلهی آن اثبات کرد که هر عدد گویا را می توان به صورت کسرهای مصری نوشت.

روش حریصانه به این صورت است که در هر مرحله، بزرگترین کسر واحدی را (با صورت ۱) که مقدار آن از عدد گویای مورد نظرمان کوچک تر است، به عنوان یکی از کسرهایی موجود در کسرهایی مصری در نظر می گیریم. این نحوهی بیان شاید تا حدی پیچیده باشد. بیان مان را با ذکر مثالی روشن می کنیم.

فرض کنید می خواهیم  $\frac{4}{13}$  را به صورت کسرهایی مصری بنویسیم. بزرگترین کسر با صورت واحد  $\frac{1}{4}$  است که  $\frac{1}{4}$  نمی تواند جزء کسرهایی مصری عدد  $\frac{4}{13}$  باشد. زیرا  $\frac{1}{4}$  از  $\frac{4}{13}$  بزرگ تر است  $\left(\frac{1}{4} > \frac{4}{13}\right)$ . بعد از  $\frac{1}{4}$  باید  $\frac{1}{3}$  را امتحان کنیم.  $\frac{1}{3}$  هم نمی تواند جزء کسرهایی مصری عدد  $\frac{4}{13}$  باشد. زیرا  $\frac{1}{3}$  هم از  $\frac{4}{13}$  بزرگ تر است  $\left(\frac{1}{3} > \frac{4}{13}\right)$ . ولی  $\frac{1}{4}$  می تواند جزء کسرهایی مصری عدد  $\frac{4}{13}$  باشد. زیرا  $\frac{1}{4} < \frac{4}{13}$  است.

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \dots$$

حال باید  $\frac{4}{13} - \frac{1}{4}$  را محاسبه کنیم که می شود  $\frac{3}{52}$  و کسرهایی بعدی را با عدد  $\frac{3}{52}$  مقایسه می کنیم. کسر  $\frac{1}{5}$  نمی تواند جزء کسرهایی مصری باشد. زیرا  $\frac{1}{5}$  از عدد  $\frac{3}{52}$  بزرگ تر است. به همین شکل اگر ادامه دهیم، به کسر  $\frac{1}{18}$  می رسیم.

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \dots$$

۱. fibonacci

سپس باید  $\frac{1}{18} - \frac{3}{52}$  را محاسبه کنیم که می شود  $\frac{1}{468}$ . بنابراین

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$$

در روش «حریصانه» اعدادی که در مخرج کسرهای مصری به دست می آیند، شاید کمی بزرگ باشند و محاسبات را سخت بکنند؛ ولی مزیت این روش این است که با آن هر عدد گویا را می توان به صورت کسرهای مصری نوشت. برای نوشتن اعداد گویا به صورت کسرهای مصری، روش های گوناگون دیگری نیز موجود است. ولی آن روش ها برای هر عدد گویایی کار نمی کند و بعضی اعداد خاص را می توان با آن روش ها به صورت کسرهای مصری نوشت. اگر بخواهیم عدد  $\frac{5}{121}$  را با استفاده از روش «حریصانه» به صورت کسرهای مصری بنویسیم، چنین می شود:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225}$$

اما  $\frac{5}{121}$  را به صورت های دیگری نیز می توان به صورت کسرهای مصری نمایش داد.

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{30} + \frac{1}{242} + \frac{1}{605} + \frac{1}{726} + \frac{1}{1210}$$

و یا به صورت خیلی ساده تر:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}$$

همان طور که ملاحظه کردید با استفاده از روش «حریصانه» معمولاً کسرهای چاقی به دست می آیند. ولی اگر از روش های دیگری استفاده کنیم، با استفاده از کسرهای لاغرتر، می توان یک عدد گویا را به صورت کسرهای مصری نوشت.

در ادامه به بعضی از این روش ها اشاره خواهیم کرد. البته این روش ها برای هر عدد گویایی جواب نمی دهند. رابطه ی زیر در تبدیل اعداد گویا به کسرهای مصری بسیار مفید است. در این رابطه،  $p$ ،  $q$  و  $z$  اعداد طبیعی هستند و  $p + q$  بر  $z$  بخش پذیر است.

$$\frac{z}{pq} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{p(p+q)}{z}} + \frac{\frac{1}{z}}{\frac{q(p+q)}{z}} \quad \text{«رابطه ی ۱»}$$

رابطه‌ی بالا به سادگی اثبات می‌شود. برای اثبات چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\frac{p(p+q)}{z}} + \frac{1}{\frac{q(p+q)}{z}} = \frac{q+p}{\frac{pq(p+q)}{z}} = \frac{(q+p)}{\frac{pq}{z}(p+q)} = \frac{1}{\frac{pq}{z}} = \frac{z}{pq}$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱، کسرهای مصری  $\frac{2}{35}$  به صورت زیر است.

$$\frac{2}{35} = \frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{\frac{5 \times (5+7)}{2}} + \frac{1}{\frac{7 \times (5+7)}{2}} = \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{7 \times 6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

۱. با قرار دادن  $z = 2$ ،  $p = 1$  و  $q = 7$  در رابطه‌ی ۱، کسرهای مصری عدد  $\frac{2}{7}$  را بنویسید.

۲. عدد  $\frac{2}{99}$  را به سه روش مختلف، با استفاده از رابطه‌ی ۱ به صورت کسرهای مصری بنویسید.

در رابطه‌ی ۱، قرار دهید  $z = 1$  و  $q = 1$ ؛ در نتیجه به رابطه‌ی جدیدی می‌رسیم که آن را رابطه‌ی ۲ نام‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \quad \text{«رابطه‌ی ۲»}$$

۳. با استفاده از رابطه‌ی ۲ توضیح دهید که هر عدد گویا را می‌توان به بی‌نهایت روش به صورت کسرهای مصری نوشت.

اگر در طرفین رابطه‌ی ۲، عدد ۲ را ضرب کنیم، به رابطه‌ی ۳ می‌رسیم.

$$\frac{2}{p} = \frac{2}{(p+1)} + \frac{2}{p(p+1)} \quad \text{«رابطه‌ی ۳»}$$

در رابطه‌ی ۳، اگر  $p$  فرد باشد،  $\frac{2}{p}$  به صورت کسرهای مصری نوشته خواهد شد.

۴. با استفاده از رابطه‌ی ۳، اعداد گویای زیر را به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{2}{7} =$$

$$\frac{2}{99} =$$

$$\frac{2}{35} =$$

برای اعداد گویایی مانند  $\frac{z}{pq}$  که مخرج آنها یک عدد مرکب است، می‌توان کسره‌های مصری  $\frac{z}{p}$  را به دست آورد. و سپس مخرج کسره‌های مصری  $\frac{z}{p}$  را در عدد  $q$  ضرب کرد. به عنوان مثال اگر بخواهیم کسره‌های مصری  $\frac{3}{16}$  را بنویسیم، چون می‌دانیم  $\frac{3}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$ ، پس می‌توان کسره‌های مصری  $\frac{3}{4}$  را محاسبه کرد و سپس عدد ۴ را در مخرج کسره‌های مصری ضرب کرد.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

۵. اعداد گویای زیر را با استفاده از روش بالا، به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{2}{35} =$$

$$\frac{2}{99} =$$

همچنین با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان هر عدد گویا را که صورت آن عدد ۲ است، به صورت کسره‌های مصری نوشت.

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{6p} \quad \text{«رابطه‌ی ۴»}$$

۶. درستی رابطه‌ی ۴ را نشان دهید.

۷. با استفاده از رابطه‌ی ۴، اعداد گویای زیر را به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{2}{7} =$$

$$\frac{2}{99} =$$

$$\frac{2}{35} =$$

از رابطه‌ی زیر نیز می‌توان برای تبدیل بعضی از اعداد گویا به کسره‌های مصری استفاده کرد.

$$\frac{a}{ab-1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b(ab-1)} \quad \text{«رابطه‌ی ۵»}$$

همان‌طور که می‌بینید در سمت چپ تساوی، «مخرج به علاوه‌ی ۱» بر صورت بخش‌پذیر می‌شود. (یعنی

$$(ab-1) + 1$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم عدد  $\frac{9}{17}$  را به صورت کسره‌های مصری بنویسیم، چنین عمل می‌کنیم:

چون  $(17+1)$  بر ۹ بخش‌پذیر است، می‌توان از رابطه‌ی ۵ استفاده کرد.

$$\frac{9}{17} = \frac{9}{9 \times 2 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(9 \times 2 - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 17} = \frac{1}{2} + \frac{1}{34}$$

۸. اعداد زیر را با استفاده از رابطه‌ی ۵، به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{2}{17} =$$

$$\frac{9}{17} =$$

$$\frac{6}{23} =$$

$$\frac{4}{23} =$$

$$\frac{2}{29} =$$

$$\frac{3}{29} =$$

$$\frac{5}{29} =$$

$$\frac{10}{29} =$$

۹. با استفاده از تمرین قبل، اعداد زیر را به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{11}{17} =$$

$$\frac{13}{29} =$$

$$\frac{10}{23} =$$

$$\frac{20}{29} =$$

۱۰. عدد  $\frac{5}{121}$  را با استفاده از روش‌هایی که در ادامه پیشنهاد می‌شود، به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

الف) با استفاده از رابطه‌ی  $\frac{5}{121} = \frac{1}{121} + \left(\frac{2}{11}\right)^2$

ب) با استفاده از رابطه‌ی  $\frac{5}{121} = \frac{1}{121} + \frac{4}{11} \times \frac{1}{11}$

ج) نوشتن کسره‌های مصری عدد  $\frac{5}{11}$  و ضرب هر مخرج در عدد ۱۱.  $\left(\frac{5}{11} = \frac{2}{11} + \frac{3}{11}\right)$

۱۱. نشان دهید که اگر  $b$  یک عدد فرد باشد،  $\frac{2}{b}$  را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به صورت کسره‌های مصری نوشت.

۱۲. نشان دهید که اگر  $b$  یک عدد زوج باشد،  $\frac{3}{b}$  را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به صورت کسره‌های مصری نوشت.

۱۳. نشان دهید که اگر  $b$  مضربی از ۳ باشد، در این صورت  $\frac{2}{b}$  را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به صورت کسره‌های مصری نوشت.

۱۴. نشان دهید که اگر  $b$  مضربی از ۵ باشد، در این صورت  $\frac{2}{b}$  را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به صورت کسره‌های مصری نوشت.