

کسر مسلسل

در این مقاله به بحث درباره‌ی کسرهایی به شکل زیر می‌پردازیم. این کسرها را «کسر مسلسل»^۱ می‌نامیم.

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

در کسرهایی مسلسل، a_1 یک عدد صحیح و a_2 تا a_n اعداد طبیعی هستند. به کسر مسلسل زیر توجه کنید.

$$4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}$$

کسر بالا را می‌توان به صورت یک عدد گویا نوشت.

$$4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2+1}} = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = 4 + \frac{1}{\frac{10}{3}} = 4 + \frac{3}{10} = \frac{43}{10}$$

۱. در واقع یک کسر مسلسل به صورت زیر است و نیازی نیست که تعداد a_i ها متناهی باشد.

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

۱. کسره‌های مسلسل زیر را به یک عدد گویا تبدیل کنید.

الف) $-3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

ج) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$

ب) $0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{20 + \frac{1}{10}}}$

د) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}}}$

هر عدد گویا را می‌توان به یک کسر مسلسل تبدیل کرد. مثلاً کسر مسلسل عدد گویای $\frac{67}{29}$ به صورت زیر است.

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

برای تبدیل $\frac{67}{29}$ به کسر مسلسل متناظرش، ابتدا ۶۷ را بر ۲۹ تقسیم می‌کنیم که خارج قسمت ۲ و باقیمانده ۹ به دست می‌آید. از این رو

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}}$$

سپس ۲۹ را بر ۹ تقسیم کرده و

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$$

را به دست می‌آوریم. تا به اینجا داریم:

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}}$$

سرانجام ۹ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

۲. اعداد گویای زیر را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

$$\frac{8}{3}, \quad \frac{153}{17}, \quad \frac{18}{5}$$

اعداد گویای منفی را نیز می‌توان به صورت کسر مسلسل نوشت:

$$-\frac{13}{5} = \frac{-15 + 2}{5} = -3 + \frac{2}{5} = -3 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = -3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

۳. اعداد گویای زیر را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

$$-\frac{29}{11}, \quad \frac{-87}{85}, \quad \frac{-1}{10}$$

۴. اعداد گویای زیر را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

$$\frac{2}{11}, \quad \frac{11}{2}, \quad \frac{100}{21}, \quad \frac{21}{100}, \quad \frac{21}{8}, \quad \frac{8}{21}$$

با توجه به تمرین بالا، کسر مسلسل یک عدد گویا را با کسر مسلسل معکوس همان عدد گویا مقایسه کنید.

۵. اعداد گویای زیر را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

$$\frac{24}{11}, \quad \frac{-24}{11}, \quad \frac{100}{21}, \quad \frac{-100}{21}, \quad \frac{21}{12}, \quad \frac{-21}{12}$$

با توجه به تمرین بالا، کسر مسلسل یک عدد گویا را با کسر مسلسل قرینه‌ی همان عدد گویا مقایسه کنید.