فصل اول: الگو و دنباله

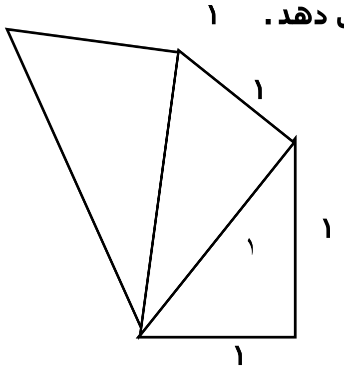
۱- جمله ی عمومی دنباله ی...و $\frac{1}{8}$ و $\frac{-1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ و -1 را بنویسید و مشخص کنید که عدد $\frac{1}{128}$

چندمین جمله ی این دنباله است؟

حل:

پس در جمله ی هشتم این دنباله به عدد $\frac{1}{128}$ می رسیم.

۲- در شکل زیر مثلث های قایم الزاویه در یک راس مشترک هستند و اندازه ی یک ضلع قائم آنها یک واحد می باشدو وتر هر مثلث ضلع قائم مثلث بعدی را تشکیل می دهد .



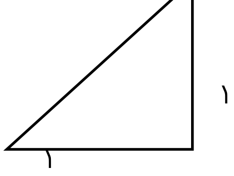
الف:جمله ی عمومی دنباله ای را بنویسید که به کمک آن بتوان وتر هر مثلث را بدست آورد .

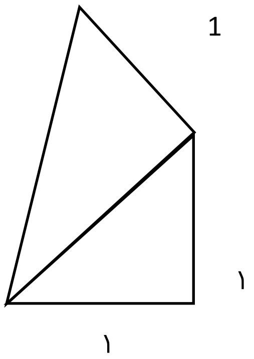
ب) در مثلث چندم اندازه ی وتر برابر ۳ می باشد .

حل:

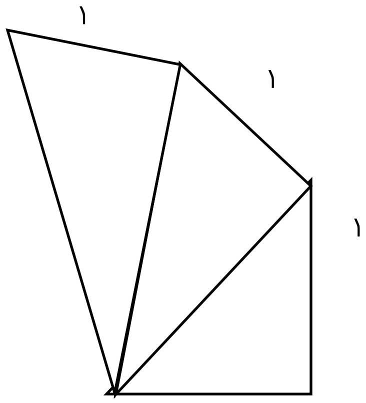
الف) به کمک رابطه ی فیثاغورس وتر را در چند مثلث بدست می آوریم.

وتر مثلث اول= $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$





وتر مثلث دوم= $\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$



وتر مثلث سوم: $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}$

پس وتر مثلث nام برابر $\sqrt{n+1}$ می باشد. پس جمله ی عمومی برای وترها به صورت

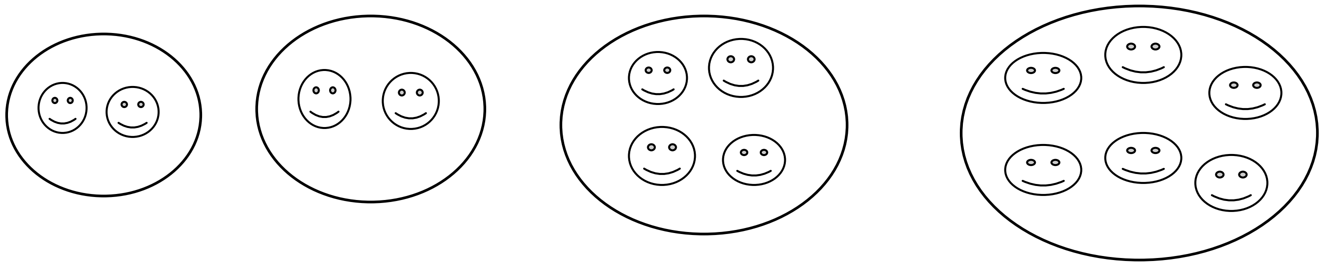
$a_n = \sqrt{n+1}$ می باشد.

ب) با استفاده از الگوی بدست آمده در مرحله ی قبل داریم :

$\sqrt{n+1} = 3 \rightarrow n$ -

پس وتر مثلث هشتم برابر ۳ است.

۳- یک دانشمند ایتالیایی به نام لئوناردو پیزا در مورد تولید مثل خرگوش ها در هر ماه دنباله ی جالبی را پیدا کرد که به آن دنباله ی فیبوناتچی می گویند . به رابطه ی بین جملات این دنباله در شکل ها دقت کنید:



(ماه چهارم) ۳ جفت= a_4 (ماه سوم) ۲جفت=a_3 (ماه دوم)۱جفت= a_2 (ماه اول)
۱جفت=a_1

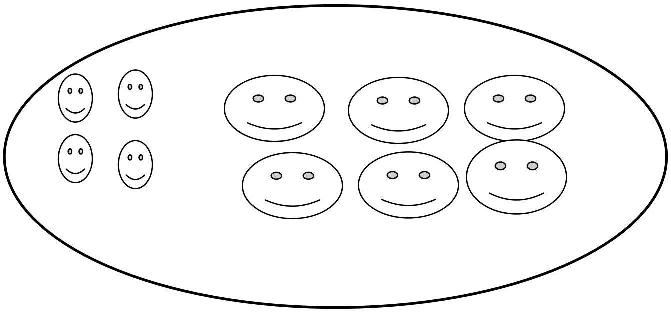
الف) الگوی موجود در شکل های بالا را کشف کرده و شکل ماه پنجم را بکشید.

ب) رابطه ی بین تعداد جفت خرگوش ها ی هر ماه با ماه قبلی را به دست آورید .

ج) یک دنباله ی بازگشتی بیان کنید که طبق آن بتوان تعداد جفت خرگوش های ماه nام را از روی ماه های قبلی به دست آورد .

حل:

الف: در هر مرحله بچه خرگوش های مرحله ی قبل بالغ شده و خرگوش های بالغ مرحله ی قبل یک جفت خرگوش به دنیا می آورند.



ب) همانطور که از اعداد و شکلها مشخص است تعداد جفت خرگوش های هر ماه از جمع کردن تعداد جفت خرگوش های ۲ ماه قبل از آن بدست می آید.

ماه ششم ماه پنجم ماه چهارم ماه سوم ماه دوم ماه اول

6 5 4 3 ۲ ۱

$a_1 + a_2 = a_3$

$a_2 + a_3 = a_4$

$a_3 + a_4 = a_5$

$\Rightarrow a_n + a_{n+1} = a$

۴- در دنباله ی حسابی a_1وa_2و$a_{3,...}$ حاصل $\frac{a_{20}-a_6}{a_{12}-a_8}$ را بدست آورید . $(d \neq 0)$

حل:

۵- بین دو عدد ۷ و ۳۲ چهار عدد درج می کنیم تا اعداد حاصل یک دنباله ی حسابی تشکیل دهند قدر نسبت این دنباله چه عددی خواهد بود ؟

حل:

$d = \frac{a_6-a_1}{6-1} = \frac{32-7}{6-1} = \frac{25}{5} = 5$ $\Rightarrow$ ۳۲ و ◯ ◯ ◯ ◯ و ۷

۶- در یک دنباله ی حسابی جمله ی هفتم چهار برابر جمله ی دوم است و مجموع جملات

اول و سوم بابر ۱۰ می باشد این دنباله را مشخص کنید .

حل:

$a_7 = 4a_2 \rightarrow a + 6d = 4(a + d) \rightarrow 3a - 2d = 0$

$a_1 + a_3 = 10 \rightarrow a$

حل دستگاه

$\Rightarrow \quad a = 2, d = 3 \qquad 2,5,8,11, \dots \qquad$: دنباله

۷- چند عدد سه رقمی وجود دارد که رقم یکانش برابر ۷ باشد ؟

حل:

دنباله ی اعداد سه رقمی که یکان ۷ دارند را می نویسیم:

در این دنباله $a = 107, d = 10$ است پس خواهیم داشت :

$a_n = 997 \rightarrow a + ($

$\rightarrow 10(n-1) = 8$

۸-واسطه ی هندسی بین دو عدد $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ را بدست آورید.

حل:

۴۴) $\underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{3}, x, \sqrt{5}+\sqrt{3}}_{\text{دنباله هندسی}} \rightarrow x^2 = (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \rightarrow x^2 = 5-3 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

واسطه ی هندسی دو عدد داده شده اعداد $\pm\sqrt{2}$ می باشد.

۹- اگر سه عدد 2^a و $4\sqrt{2}$ و 2^b تشکیل دنباله ی هندسی دهند واسطه ی حسابی بین دو عدد a و b را بدست آورید.

حل:

$2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$

a, x, b ـــــــ سابی

۱۰- در یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت ۲ حاصل $\frac{a_1 \times a_7}{{a_2}^2}$ را بدست آورید.

حل:

۱۱-در یک دنباله ی هندسی جمله ی بیست و هفتم معکوس جمله ی پنجم است جمله ی شانزدهم این دنباله را بذست آورید (جمله های دنباله مثبت هستند.)

حل:

جذر

$(a_{16} = aq^{15})$

۱۲- بین دو عدد ۶ و ۹۶ سه عدد درج کنید بطوری که پنج عدد حاصل جملات متوالی یک دنباله ی هندسی باشند.

حل:

۶ و ◯ و ◯ و ◯ و ۹۶

$\downarrow$ $\downarrow$

a_1 a_5

$q^{5-1} = \frac{a_5}{a_1} \rightarrow q^4 =$

این مسئله دو جواب دارد:

$q = 2 \rightarrow 6,12,24,$

$q = -2 \rightarrow 6,-12$

۱۳-ثابت کنید اگر اعداد $\frac{1}{b-a}$ و $\frac{1}{2b}$ و $\frac{1}{b-c}$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی باشند آنگاه a,b,c جملات متوالی یک دنباله ی هندسی هستند.

حل: دنباله حسابی

$$\frac{1}{b-c},\frac{1}{2b},\frac{1}{b-a}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{2b-a-c}{b^2-bc-ab+ac}\rightarrow b^2-\cancel{bc}-\cancel{ab}+ac=2b^2-\cancel{ab}-\cancel{bc}$$

$$\rightarrow b^2=ac$$ ند

۱۴-اگر یک دنباله هم حسابی باشد هم هندسی جملات آن به چه عددی نزدیک می شوند؟

حل:

دنباله ا ی که هم حسابی و هم هندسی باشد دنباله ایست که همه ی جملات آن با

هم برابرند :

$$a,a,a,\ldots\rightarrow\begin{cases}d=0\ \text{دنباله ی حسابی}\\ q=1\ \text{یک دنباله ی هندسی}\end{cases}$$

این دنباله به عدد a نزدیک میشود.

تذکر : دنباله ی حسابی تنها در صورتی به یک عدد مشخص نزدیک میشود که همه جملاتش باهم برابر باشند.

۱۵-با تقسیم عدد ۱ بر ۳ خارج قسمت های بدست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید این دنباله به چه عددی نزدیک می شود .

حل:

این اعداد به$\frac{1}{3}$ نزدیک می شوند زیرا اختلاف آنها با عدد $\frac{1}{3}$ دنباله ی میسازد که جملات آن

به صفر نزدیک میشود:

$$\frac{1}{3}-0.3=\frac{0.1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{0.01}{3}$$

$$\frac{1}{3} - 0.333 = \frac{0.0}{3}$$

۱۶-ریشه ی سوم عدد $2\sqrt[5]{3}$ را بدست آورید.

حل:

$$\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5 \times 3}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{96}} = \sqrt[15]{96}$$

۱۷- تساوی $\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{c^3}} = \frac{-a\sqrt{ab}}{c\sqrt{c}}$ در چه صورتی برقرار است؟

حل:

$$\frac{\sqrt{ba^3}}{\sqrt{c^3}} = \frac{-a\sqrt{ab}}{c\sqrt{c}}$$

طبق صورت سوال

$$\sqrt{a^3b} = \sqrt{a^2 \times ab}$$

چون $|a| = -a$ پس a منفی است از طرفی $\sqrt{ab}$ تعریف شده است پس $ab > 0$ در نتیجه

bنیز باید منفی باشد. طبق صورت سوال

$$\sqrt{c^3} = \sqrt{c^2 \times c} =$$

بنابراین $|c| = c$ پس c مثبت است.البته تساوی فوق به ازای a=0و b=0 نیز برقرار است اما

به ازای c=0 برقرار نمیباشد پس شرایط برقراری به صورت زیر است:

$$b \leq 0, \quad a \leq 0, \quad c$$

۱۸- حاصل عبارات زیر را بدست آورید .

الف) $\sqrt[8]{8}\times\sqrt[6]{8}$

ب) $\sqrt{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{\sqrt{2}}}$

ج) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{8}}\right)^{0/7}$

حل:

الف)

$\sqrt[6]{8}\times\sqrt[8]{8}=\sqrt[6]{2^3}$

ب) $\sqrt{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}}=\sqrt{2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}=\sqrt{2^{\frac{7}{12}}}=2^{\frac{\frac{7}{12}}{2}}=2^{\frac{7}{24}}=\sqrt[24]{2^7}=\sqrt[24]{128}$

ج) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{7}{10}}=\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{7}{10}}=\frac{1}{8}^{\frac{1}{10}}=\sqrt[10]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{\sqrt[10]{8}}$

۱۹- اگر x عددی مثبت باشد جواب معادله ی $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^2}}}$ **را بدست آورید.**

حل:

چون x مثبت است پس $\sqrt{x^2}=x$ بنابراین :

$\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^2}}}=2$

۲۰- اگر جمله عمومي يك تصاعد عددي $a_n=5n-4$ **باشد قدرنسبت آن كدام است؟**

حل:

$$\left| \begin{array}{l} a_۲ = ۵(۲) - ۴ = ۱۰ - ۴ = ۶ \\ a_۱ = ۵(۱) - ۴ = ۵ - ۴ = ۱ \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} d = a_۲ - a_۱ \\ d = ۶ - ۱ = ۵ \end{array}$$

۲۱- به ازاء چه مقدار m سه عبارت $m+۳ , ۲m-۱ , ۵m+۶$ تشكيل يك تصاعد حسابي مي‌دهند؟

حل:

$$۲b = a + c \Rightarrow ۲(۲m-۱) = (m+۳)+(۵m+۶) \Rightarrow ۴m-۲ = ۶m+۹ \Rightarrow ۴m-۶m = ۲+۹$$
$$\Rightarrow -۲m = ۱۱ \Rightarrow m = -\frac{۱۱}{۲}$$

۲۲- در يك تصاعد عددي $S_n = ۲n(n+۱)$ ، جملة هشتم اين تصاعد كدام است؟

حل:

از طرفي داريم : $\left| \begin{array}{l} S_۸ = ۲ \times ۸(۸+۱) = ۱۶ \times ۹ = ۱۴۴ \\ S_۷ = ۲ \times ۷(۷+۱) = ۱۴ \times ۸ = ۱۱۲ \end{array} \right.$

$$a_۸ = S_۸ - S_۷ = ۱۴۴ - ۱۱۲ = ۳۲ \quad \Rightarrow \quad a_۸ = ۳۲$$

۲۳-بين دو عدد ۸- و ۷ تعداد ۴ واسطة حسابي درج مي‌كنيم. جملة چهارم اين تصاعد حسابي كدام است؟

$$d = \frac{۷-(-۸)}{۴+۱} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

حل: ۷ و ...... و ۸- $\xleftrightarrow{\text{٤ واسطه}}$ $\left| \begin{array}{l} a_۴ = a_۱ + (۴-۱)d \\ a_۴ = -۸ + ۳ \times ۳ = -۸ + ۹ = ۱ \end{array} \right.$

۲۴- در يك تصاعد هندسي $a_۴ = ۱۶۲$ و $a_۱ = ۶$ است. قدرنسبت اين تصاعد كدام است؟

حل:

$$q^{4-1}=\frac{a_4}{a_1}\Rightarrow q^3=\frac{6}{162}=\frac{1}{27}\Rightarrow q^3=\frac{1}{3^3}\Rightarrow q=\frac{1}{3}$$

۲۵-سه واسطهٔ هندسي بين دو عدد ۲ و ۱۶۲ درج کنید.

حل:

۱۶۲ و . . . و . . . و . . . و ۲

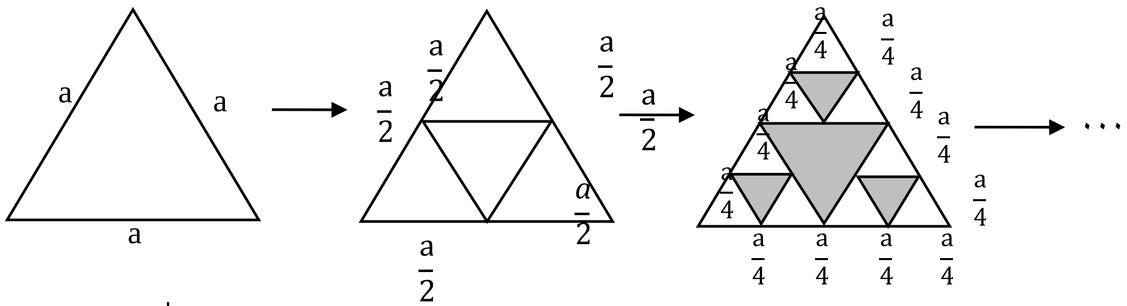
$$q=\pm\sqrt[3+1]{\frac{162}{2}}=\pm\sqrt[4]{81}=\pm\sqrt[4]{3^4}=\pm 3$$

اگر ۳ =q داریم: ۱۶۲ و ۵۴ و ۱۸ و ۶ و ۲

اگر ۳- =q داریم:۱۶۲ و ۵۴- و ۱۸ و ۶- و ۲

۲۶- برای ایجاد مثلث سرپینسکی، مثلث متساوی الاضلاعی را در نظر گرفته، وسط های اضلاعش را به هم وصل می کنیم، بعد مثلث وسطی را رنگ می کنیم . سپس روی مثلث های سفید همین کار را تکرار می کنیم و این روند را ادامه می دهیم . جمله ی عمومی دنباله ی تعداد مثلث های رنگ شده را بیابید.

حل:



مرحله ی صفر　　مرحله ی ۱　　مرحله ی ۲

دنباله ی ... , 40 , 13 , 4 , 1 , 0 به دست می آید و جمله ی عمومی آن $a_n=\frac{3.^{n}-1}{2}$ است.

۲۷- برای هر عدد طبیعی n، جمله ی $n(n+1)$ ام یک دنباله برابر با $\frac{n^2+3}{\sin^2 n+\cos^2 n}$ است؛ جملهٔی ششم این دنباله چیست؟

حل: $n(n+1)$ را مساوی ۶ می گذاریم، ببینیم n چند می شود:

$$n(n+1)=6\Rightarrow$$

حالا در $\frac{n^2+3}{\sin^2 n+\cos^2 n}$ به جای n می گذاریم۲ (همیشه $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$):

$$\frac{n^2+3}{\sin^2 n+\cos^2 n} =$$

۲۸- دنباله ی a_n به این صورت تعریف شده که $a_1 = 1$ و برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ مانند n , $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$، در این صورت مقدار a_{1389} چیست؟

حل:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{a_1} \xrightarrow{a_1=}$$

$$\frac{1}{a_3} = 1 + \frac{1}{a_2} = 1$$

$$\frac{1}{a_4} = 1 + \frac{1}{a_3} = 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} =$$

$$a_{1389} = \frac{1}{1389}$$

جمله عمومی دنباله را پیدا کردیم.

۲۹-جمله ی عمومی یک دنباله ی حسابی به صورت $a_n = (m^2-9)n^2 + \frac{m+n}{m^2+2m+2}$ است. اگر قدر نسبت این دنباله $\frac{1}{5}$ باشد، مقدار m چیست؟

حل:

اولاً: جمله ی عمومی دنباله ی حسابی باید خطی باشد، پس نباید در جمله ی عمومی n^2 داشته باشیم یعنی باید ضریب n^2 صفر باشد:

$$m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m$$

ثانیاً: ضریب n، قدر نسبت دنباله است و سؤال می خواهد $\frac{1}{5}$ شود. ضریب n را در a_n پیدا می‌کنیم: (دقت کنید که دیگر $(m^2-9)n^2$ نداریم)

$$a_n = \frac{m+n}{m^2+2m+}$$

ضریب n مساوی $\frac{1}{m^2+2m+2}$ است که به ازای $m = 3$ می شود $\frac{1}{17}$ و به ازای $m = -3$ می شود $\frac{1}{5}$، پس فقط $m = -3$ قبول است.

۳۰- در یک دنباله ی حسابی $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}=0$ در این صورت حاصل $\frac{a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{3n-1}}{a_4+a_7+a_{10}+\cdots+a_{3n+1}}$ چیست؟ (n عدد طبیعی دلخواه است و جملات دنباله متمایزند.)

حل:قدر نسبت دنباله را d می گیریم. در این صورت:

$$\frac{a_2+a_5+a_8+\cdots}{a_4+a_7+a_{10}+\cdots}$$
$$\frac{(a_3+a_6+a_9+\cdots}{(a_3+a_6+a_9+\cdots}$$

۳۱- قدر نسبت یک دنباله ی حسابی، d است. اگر از این دنباله جملاتی را انتخاب کنیم که شماره ی آن ها (n در a_n) دنباله ی حسابی با قدرنسبت m بسازند ($m\in\mathbb{N}$)، قدر نسبت دنباله ی حسابی جدید چیست؟

حل: اگر a_i یک جمله از دنباله ی حسابی با قدرنسبت d باشد که انتخاب می شود، a_{i+m} جمله ی بعدی آن در دنباله ی نهایی است. حالا:

$$a_{i+m}-$$
$$md$$

این مقدار ثابت است. پس دنباله ی نهایی، دنباله ای حسابی است که قدرنسبت آن حاصل ضرب قدرنسبت دو دنباله ی دیگر است.

۳۲- A مجموعه ی صد جمله ی اول یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول ۳ و قدرنسبت ۴است. B هم مجموعه ی صد جمله ی اول یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول ۵ و قدرنسبت ۶ است. $A\cap B$ چند عضو دارد؟

حل: راه اول:

ام دنباله ی اول n

ام دنباله ی دوم m

برای دنباله ی دوم m نوشتیم که با nای که در دنباله ی اول بود، قاطی نشود حالا جمله‌ی عمومی دو دنباله را مساوی هم قرار می دهیم:

$$4n-1=6m-1$$

چون m و n طبیعی اند، m باید زوج باشد و در این صورت، n مضرب ۳ می شود. یعنی شماره‌ی جملات مشترک دو دنباله، در دنباله ی اول مضارب ۳ و در دنباله ی دوم مضارب ۲ هستند:

$$1\le\frac{3}{2}m\le 100=$$

ها 23 عدد هستند

پس دو دنباله، در صد جمله ی اول خود، ۳۳ جمله ی مساوی با یکدیگر دارند. یعنی $A \cap B$ دقیقاً ۳۳ عضو دارد.

۳۳- شرط لازم و کافی برای آن که سه عدد x، y و z به ترتیب mاُمین، nاُمین و pاُمین جمله از یک دنباله ی حسابی باشند، چیست؟

حل:فرض کنیم x، y و z به ترتیب mاُمین، nاُمین و pاُمین جمله از یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول a_1 و قدر نسبت d باشند. در این صورت:

$$x = a_m = a_1 + (\mathrm{n}$$

حال رابطه ی دوم را از رابطه ی اول کم می کنیم:

$$x - y = a_1 + (m$$

به طور مشابه، اگر رابطه ی سوم را از رابطه ی دوم کم کنیم، داریم:

$$y - z = (n - p)d$$

دو رابطه ی اخیر می گوید:

$$\frac{x - y}{m - n} = d\ ,\frac{y - z}{n - \mathrm{p}}$$

عکس مطالب فوق (از آخر به اول) نیز برقرار است، پس شرط فوق لازم کافی است. (شرط لازم و کافی یعنی شرط دوطرفه)

۳۴- در یک دنباله ی هندسی با $2n$ جمله و قدر نسبت q، نسبت مجموع جملاتی که شماره ی آن ها زوج است $(\ldots, a_4, a_2)$ به مجموع جملاتی که شماره ی آن ها فرد است $(\ldots, a_3, a_1)$، چیست؟ $(a_1 q \neq 0)$

حل:چون دنباله ی هندسی است، داریم:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots =$$

یک چیز را هم می دانیم : اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$ آن گاه $\frac{a+c}{b+d} = m$ این چیزی است که هست بنابراین با در نظر گرفتن تعمیم این مطلب برای چند تناسب، داریم:

$$\frac{a_2 + a_4 + \cdots + a}{a_1 + a_3 + \cdots + a_2}$$

یعنی نسبت مورد نظر همان قدر نسبت دنباله است.

۳۵- در یک دنباله ی هندسی با جملات مثبت، $a_2 = 10^5$ و $a_4 = 10^4$؛ چند جمله از این دنباله بزرگ تر از ۱ است؟

حل:باداشتن دو جمله از دنباله سراغ q می رویم:

$$q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Longrightarrow q^4$$

حالا جمله ی اول می شود:

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{10^5}{\frac{1}{\sqrt{10}}} =$$

و جمله ی عمومی دنباله به این صورت درمی آید:

$$a_1 = a_1 q^{n-1} = 10$$

برای پیدا کردن تعداد جملات بزرگ تر از ۱، جمله ی عمومی دنباله را بزرگ تر از ۱ قرار می‌دهیم:

$$a_n > 1 \Longrightarrow 10^{6-\frac{n}{2}}$$

یازده جمله ی اول دنباله بزرگ تر از ۱ است و سایر جملات بین صفر و یک اند.

۳۶- قدر نسبت یک دنباله ی هندسی، q است. اگر از این دنباله، جملاتی را انتخاب کنیم که شماره ی آن ها (n در a_n) دنباله ای حسابی با قدر نسبت m می سازند ($m \in \mathbb{N}$)، قدر نسبت دنباله ی جدید چیست؟

حل:اگر a_i یک جمله از دنباله ی هندسی با قدر نسبت q باشد، a_{i+m} جمله ی بعدی آن در دنباله ی نهایی است.

$$\frac{a_{i+m}}{a_i} = \frac{a_i q^{i+m-1}}{a_i q^{i-1}}$$

این مقدار ثابت است . پس دنباله ی نهایی، دنباله ای هندسی است که قدرنسبت آن، قدر نسبت دنباله ی هندسی اصلی به توان قدر نسبت دنباله ی شماره ی جملات است.

۳۷- عدد ۳۲۵ را به سه قسمتِ صحیح تقسیم کنید طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله ای هندسی بدهند و اختلاف دو عدد بزرگ تر ۱۵۰ باشد.

حل: دنباله ای هندسی مثل a_1, a_2, a_3 می خواهیم طوری که :

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3$$

فرض کنیم قدر نسبت q باشد. در این صورت:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = a \\ a_3 - a_2 = a_1 q^2 \end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{a_1(1+q+q^2)}{a_1(q^2-q)} =$$

$19q - 6 = 0$

$\Delta = 19^2 + 4 \times 7 \times$

$a_1(q^2-q) = 150$

$a_1(q^2-q) = 150$

پس سه عدد مورد نظر، ۲۵، ۷۵ و ۲۲۵ هستند.

۳۸- جمله ی اول یک دنباله ی حسابی و یک دنباله ی هندسی برابر با $\sqrt{3}$ و جمله دوم این دو دنباله برابر با $\sqrt{7}$ است .کوچکترین n که به ازای آن جمله ی nاُم دنباله ی حسابی از جمله ی nاُم دنباله ی هندسی بزرگ تر است، چیست؟

حل:چنین n وجود ندارد.

دنباله ی حسابی را $\sqrt{3}, \sqrt{7}, a_3, a_4, \ldots$ و دنباله ی هندسی را $\sqrt{3}, \sqrt{7}, t_3, t_4, \ldots$ می گیریم. از دنباله ی هندسی داریم:

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

وقتی بین چهار عدد مثبت، یک تناسب داریم، مجموع کوچک ترین و بزرگ ترین آن ها، از مجموع دو عدد دیگر بزرگ تر است؛ در این جا هم چون قدر نسبت دنباله ی هندسی بزرگ تر از ۱ است و جملات دنباله مثبت اند، $\sqrt{3}$ کوچک ترین و t_{n+1} بزرگ ترین جمله در $n+1$ جمله ی اول است.

بنابراین:

$t_{n+1} + \sqrt{3} > t_n +$

رابطه ی بالا برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq 2$، برقرار است. یعنی:

$t_3 > t_2 + \sqrt{7} - \sqrt{}$

$t_4 > t_3 + \sqrt{7} - \sqrt{}$

$t_5 > t_4 + \sqrt{7} - \sqrt{}$

$\vdots$

$t_{n+1} > t_n + \sqrt{7} -$

$\sqrt{7}$ جمله ی دوم دنباله ی هندسی و هم چنین جمله ی دوم دنباله ی حسابی.

اگر جمله ی دوم دنباله ی حسابی را به جای $\sqrt{7}$، a_2 بنامیم، داریم:

$t_{n+1} > t_2 + (n -$

یعنی از جمله ی سوم به بعد، هر جمله ی دنباله ی هندسی از جمله ی نظیرش در دنباله ی حسابی بزرگ تر است.

به جای $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ هر دو عدد مثبت دیگری هم بگذارید، نتیجه همین است. این را برنولی فهمید:

فرض کنیم a، b، c و d چهار عدد مثبت باشند، a بزرگ ترین این اعداد و d کوچکترین آن ها باشد. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن گاه:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a-b}{c-d}$$

چون $c<a$، پس $\frac{a}{c}>1$ و در نتیجه:

$$\frac{a-b}{c-d}>1 \xrightarrow{d<c}$$

۳۹- جملات دنباله ی تقریبات اعشاری زیر، به چه عددی نزدیک می شود؟

3/1 ,3/14 ,3/1

حل:به عدد گنگ π،... $\pi=3/14159265358979$

البته با قطعیت نمی توان گفت دنباله ی مورد نظر به π نزدیک می شود چون نظم خاصی ندارد.

۴۰-اگر $x^2-0/003x+2\times10^{-6}$ کوچکتر از صفر باشد، سه جمله ی اول دنباله ی تقریبات اعشاری x چیست؟

حل:

$$x^2-0/$$

پس سه جمله ی اول دنباله ی تقریبات اعشاری x این است: $0/0\,,0/00\,,0/001$

که می شود : $0\,,0\,,0/001$

۴۱- ریشه های دوم عدد $\sqrt[6]{3\sqrt{2}}$ با ریشه ی سوم چه اعدادی مساوی اند؟

حل:اول دقت کنید که $\sqrt[6]{3\sqrt{2}}=\sqrt[6]{\sqrt{9\times2}}=\sqrt[12]{18}$. این عدد دو ریشه ی دوم دارد. در واقع اگر a ریشه ی دوم آن باشد، داریم:

$$a^2=\sqrt[12]{18}\Longrightarrow a=$$

حالا ببینیم هر یک از اعداد $\sqrt[24]{18}$ و $-\sqrt[24]{18}$ ریشه ی سوم چه اعدادی هستند:

$\sqrt[24]{18} = \sqrt[3]{b}$

و به طور مشابه، معلوم می شود $\sqrt[24]{18}-$ ریشه ی سوم $\sqrt[8]{18}-$ است.

۴۲- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $x^{2\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}} - 20 = 0$ **ب) $x^{3-\sqrt{3}} = 5$**

حل: الف)

$x^{2\sqrt{3}} -$

$x^{\sqrt{3}} =$

$x^{\sqrt{3}} =$

$\sqrt[3]{5^{\sqrt{3}}}$

$x^{\sqrt{3}} = -4$ هم جواب ندارد، چون توان گنگ اعداد منفی تعریف نمی شود.

ب)

$x^{3-\sqrt{3}} = 5 \xrightarrow{3+\sqrt{3}}$

$x^{9-3} = 5^{3+\sqrt{3}} \Longrightarrow$

۴۳- عدد مثبت x را بیابید طوری که داشته باشیم $x^{\frac{x}{5}} = (\frac{x}{5})^x$.

حل:

$x^{\frac{x}{5}} =$

$(\frac{1}{5})^{-}$