فصل دوم: تابع

۱- رابطه ی R را از مجموعه ی $A = \{1,2,3\}$ به مجموعه ی $B = \{2,3,4\}$ چنین تعریف می کنیم:

(a,b) عضو مجموعه ی R است اگر $a < b$.

الف) این رابطه را با زوج مرتب نمایش دهید.

ب) این رابطه چند عضو دارد؟

حل:

الف) $\{(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,4)\}$

ب) این رابطه ۶ عضو دارد.

۲- اگر رابطه ی $f = \{(1,2),(-1,m-1),(-1,2m)\}$ یک تابع باشد آنگاه مقدار m را بدست آورید.

حل:

زوج های مرتب $(-1,2m)$و$(-1,m-1)$ مولفه های اول یکسان دارند.پس برای تابع بودن

رابطه ی f لازم است که مولفه های دوم آنها نیز یکسان باشند تا دو زوج مرتب متمایز نباشند

بنابراین:

$m - 1 = 2m \rightarrow m$

اگر $m=-1$ باشد نمایش زوج مرتبی به صورت $\{(1,2)(-1,-2)\}$ خواهد بودکه نمایش دهنده ی

یک تابع است.

۳- اگر بدانیم رابطه ی زیر که به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب داده شده یک تابع است مقادیر aوb را بدست آورید و آن را به صورت نمودار ون نمایش دهید .

$R = \{(a,2),(5,a+1),(a+2,b),(4,3),(5,3)\}$

حل:

به دلیل وجود دو زوج مرتب $(5,a+1)$و$(5,3)$ در رابطه برای اینکه رابطه ی Rنشان دهنده ی یک تابع باشد باید این دو زوج مرتب متمایز نباشند.

$3 = a + 1 \rightarrow a =$

اگر $a=2$باشد آنگاه رابطه به صورت زیر خواهد بود

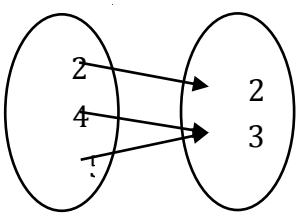
$R = \{(2,2)(5,3)($

در این صورت برای اینکه دو زوج مرتب $(4,3)$و$(4,b)$ متمایز نباشد باید b=۳ باشد.در این صورت

R به صورت زیر خواهد بود .

$R = \{(2,2)(5,3)($

بنابراین نمودار ون رابطه ی R به صورت زیر خواهد بود .



۴- xوy اعدادی صحیح هستند.آنها را طوری بیابید که نمایش زوج مرتبی
$\left\{(x+1,1),(3,y),\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right)\right\}$ تابع نباشند. (راهنمایی: عبارت $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ در مجموعه ی اعداد

صحیح فقط برای ۱و۱- تعریف شده است.)

حل:

برای اینکه رابطه ی $\left\{(x+1,1),(3,y),\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right)\right\}$ تابع نباشد باید xوy را به گونه ای بیابیم

که دو زوج مرتب با مولفه های اول یکسان و مولفه های دوم متفاوت ایجاد شود:

$x \in z \to x+1 \in$

پس دو زوج مرتبی که باید مولفه های اول یکسان و مولفه های دوم متفاوت داشته

باشند$(3,y)$و$(x+1,1)$ هستند $x+1=3, \to x=2, y \neq 1$

با توجه به راهنمایی مسئله عبارت$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ فقط به ازای $y=1$و $y=-1$ قابل تعریف میباشد.از

طرفی نتیجه گرفتیم $y \neq 1$ بنابراین $y=-1$.

۵- رابطه ای بنویسید که دامنه ی آنها بینهایت عضو داشته باشد ولی برد آنها تک عضوی

باشد. آیا این رابطه یک تابع است؟

حل:

دامنه را مجموع اعداد صحیح و برد را $\{a\}$ در نظر میگیریم.

$R = \{\dots(-1, a), ($

این رابطه تابع میباشد زیرا برد یک عضو دارد و هیچ دو زوج مرتبی وجود ندارند که مولفه های اول برابر و مولفه های دوم متفاوت داشته باشند.

۶- سودی که از تولید یک کالا توسط یک شرکت تولیدی حاصل می شود از معادله ی $y = -200 + 5x$ بدست می آید.در این معادله x تعداد کالای تولیدی و y سود حاصل بر حسب میلیون تومان است.

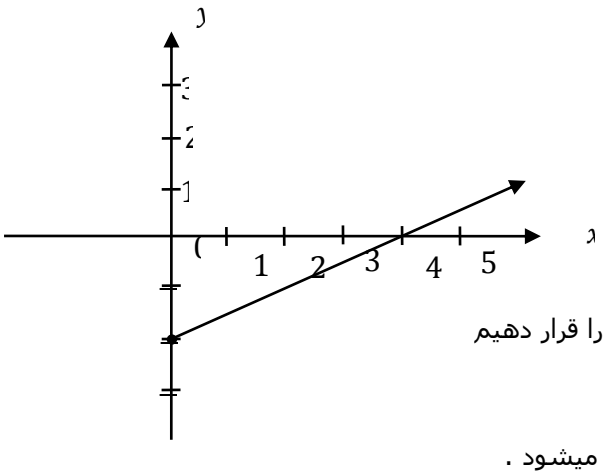
الف) نمودار خط $y = -200 + 5x$ را برای $x \geq 0$ رسم کنید.

ب) این شرکت باید چه تعداد ازین کالا را تولید کند تا سود ۱۰۰ میلیون تومان بدست آورد؟

ج) محل برخورد این خط با محور x ها چه چیزی را نشان می دهد.

حل:

الف)



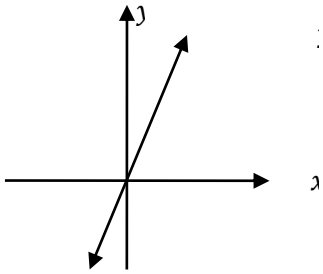
ب) باید در معادله ی $y = -200 + 5x$ به جای y عدد ۱۰۰ را قرار دهیم

$100 = -200 + 5.$

یعنی با تولید ۶۰ عدد از این کالا ۱۰۰ میلیون تومان حاصل میشود .

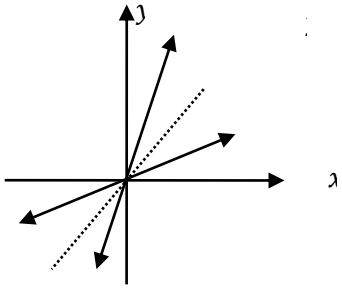
ج) محل برخورد این خط با محور xها نشان میدهد که به ازای چه تعداد محصول تولیدی سود برابر صفر و از آنجا به بعد سود مثبت می شود و در واقع مرز تولید سودآور را مشخص میکند در این خط محل برخورد با محور xها ۴۰ است یعنی با تولید ۴۰ عدد از این کالا سود صفر است تولید کمتر از ۴۰ عدد باعث ضرر (سود منفی) و تولید بیش از ۴۰ عدد باعث سود می شود .

۷- نمودار زیر نشان دهنده ی یک تابع خطی است نمودار وارن آن و معادله ی نمودار وارون آن را به دست آورید چه رابطه ای بین معادله نمودار تابع و معادله ی نمودار وارون آن وجود دارد؟

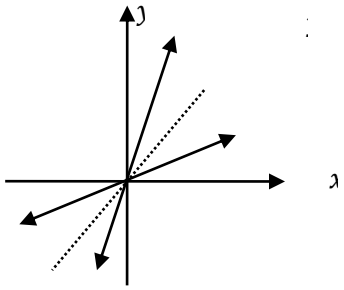


حل:

برای بدست آوردن نمودار وارون تابع کافی است نمودار تابع را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.



برای بدست آوردن معادله ی تابع خطی جدید بدست آمده (وارون تابع) کافی است دو نقطه ی (۰و۰) و(۲و۱) روی تابع اصلی را وارون کنیم تا نقاط (۰و۰) و(۱و۲) روی تابع وارون بدست آیند حال معادله خط جدید به صورت زیر به دست می آید:



بین معادله ی $y=2x$ و $y=\frac{1}{2}x$ میتوان رابطه ای به صورت زیر نوشت:

در اثر قرینه شدن نسبت به خط $y=x$ شیب خط اول معکوس شده است.

۸- تابع مقابل را در نظر بگیرید:

x	۰	۱	۲	۳
y	۲	۵	۸	۱۱

الف) آیا این تابع یک به یک است ؟ معادله ای برای آن بنویسید .

ب) وارون این تابع را به صورت جدول نشان دهید معادله ای برای وارون آن بنویسید .

ج) نمودار تابع و نمودار وارون آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

حل:

الف : از آنجا که به هر y فقط یک x نظیر شده است تابع داده شده یک تابع یک به یک است

حدس میزنیم که تابع خطی است.معادله ی ان را به صورت زیر بدست می آوریم :

بادر نظر گرفتن دو نقطه ی $(1,5)$و$(0,2)$ داریم:

$$y-2=\frac{5-2}{1-0}(x$$

ذقت کنیدکه نقاط $(3,11)$و$(2,8)$ نیز در این معادله صدق می کنند پس حدس خطی بودن تابع درست است.

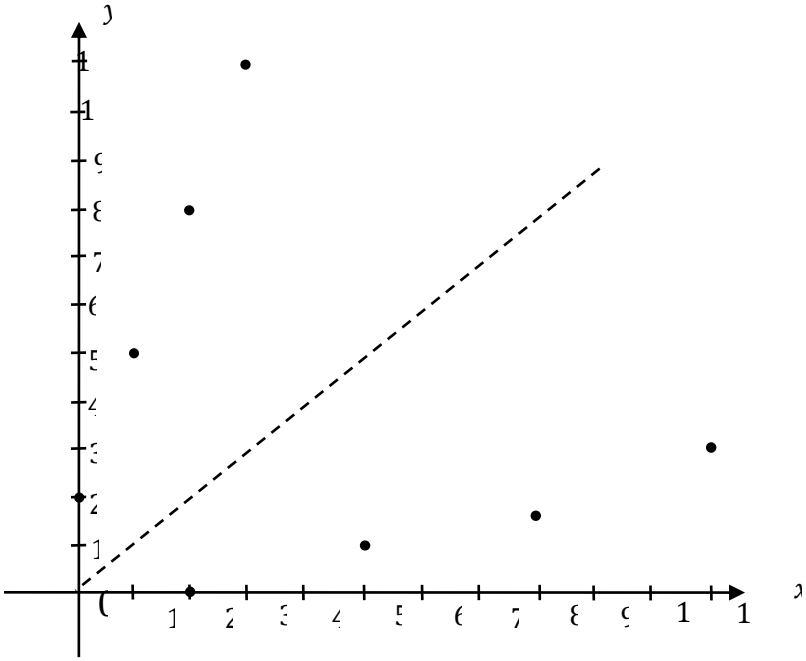
ب) وارون این تابع به صورت روبرو خواهد بود:

x	۲	۵	۸	۱۱
y	۰	۱	۲	3

وارون یک تابع خطی تابعی خطی است . بنابراین معادله ی تابع وارون به صورت زیر به دست خواهد آمد:

با در نظر گرفتن دو نقطه ی $(5,1)$و$(2,0)$ متعلق به تابع وارون داریم:

ج)



۹-اگر تابع *f* با معادله ی $f(x) = 2x - 2$ داده شده باشد ،

الف : مقادیر* f(0)و f(2)و f(1) و f(4) *را محاسبه کنید.

ب) با فرض اینکه دامنه ی *f* برابر (+∞ و *0*] است نمودار آن را رسم کنید.

حل:

الف:

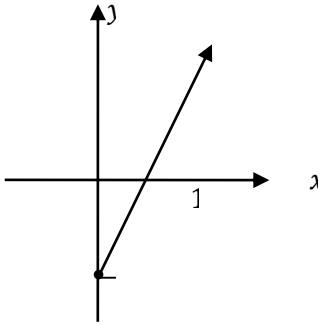
$f(0) = 2 \times (0) -$

$f(2) = 2 \times 2 - 2$

$f(1) = 2 \times 1 - 2$

$f(4) = 2 \times 4 - 2$

ب) با توجه به اینکه $f(0)=-2$ و $f(1)=0$ میباشد نقاط $(1,0)$ و $(0,-2)$ روی خط قرار دارند:

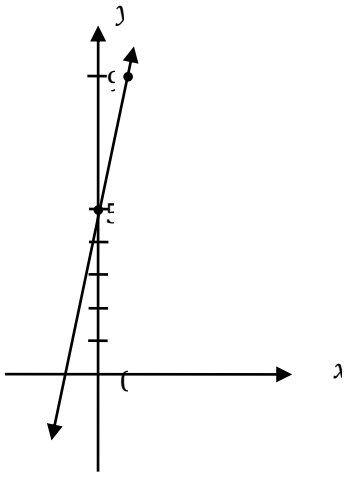


۱۰-برای یک تابع خطی می دانیم که $f(0)=5$ و $f(1)=9$ نمودار این تابع را رسم کنید و معادله ی آن (نمایش جبری تابع) را بنویسید.

حل:

$f(0)=5$ و $f(1)=9$ بنابراین نقاط $(1,9)$ و $(0,5)$ عضو تابع هستند.

$$y-5=\frac{9-5}{1-0}(x-0)\rightarrow y=f(x)=4x+5$$



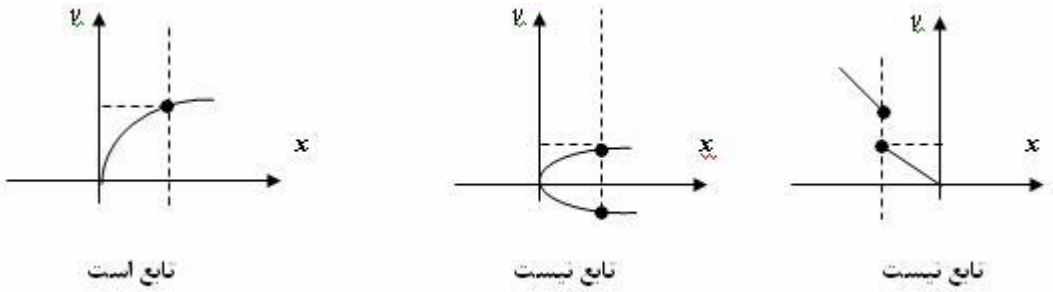
۱۱-آیا رابطة $f(x)=x^{۳}+۱$ یك تابع است؟

حل:

(روش اول $x_{۱}=x_{۲} \Rightarrow x_{۱}^{۳}=x_{۲}^{۳} \Rightarrow x_{۱}^{۳}+۱=x_{۲}^{۳}+۱ \Rightarrow y_{۱}=y_{۲}$ تابع است

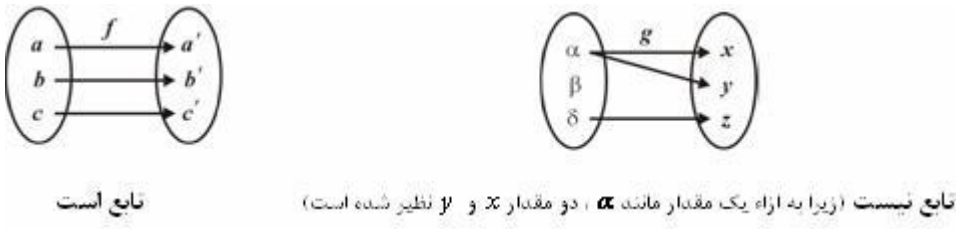
۱۲- در نمودارهاي زير ، كدام نمودار تابع مي‌باشد؟

حل:



۱۳- از دو نمودار زير، كدام نمودار تابع است؟

حل:



۱۴- بررسي كنيد معادله زير ضابطة يك تابع مي‌باشد.

$$x^{۲} + y^{۲} = ۴$$

حل:

روش اول : $y^{۲} = ۴ - x^{۲} \Rightarrow y = \pm\sqrt{۴ - x^{۲}}$

روش دوم: با استفاده از روش عدد گذاري به x عددي دلخواه مانند صفر مي‌دهيم به طوري كه:

$$(۰)^{۲} + y^{۲} = ۴ \Rightarrow y^{۲} = ۴ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۴} \Rightarrow \begin{cases} y_{۱} = ۲ \\ y_{۲} = -۲ \end{cases}$$

۱۵- خاصيت يك به يك بودن را براي تابع با ضابطه $g(x) = \dfrac{x - ۲}{۲x + ۱}$ **بررسي كنيد.**

حل:

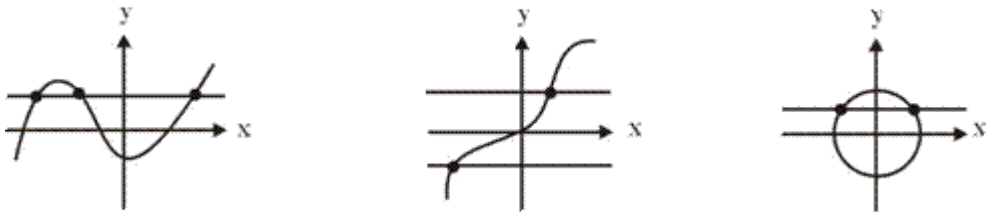
شرط يك به يك بودن تابع : $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{2x_1 + 1} = \frac{x_2 - 2}{2x_2 + 1} \Rightarrow (2x_2 + 1)(x_1 - 2) = (2x_1 + 1)(x_2 - 2)$$
$$\Rightarrow 2x_2 x_1 - 4x_2 + x_1 - 2 = 2x_1 x_2 - 4x_1 + x_2 - 2 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

چون شرط برقرار است پس تابع يك به يك مي‌باشد.

۱۶-از نمودارهاي زير كدام يك به يك است؟

حل:

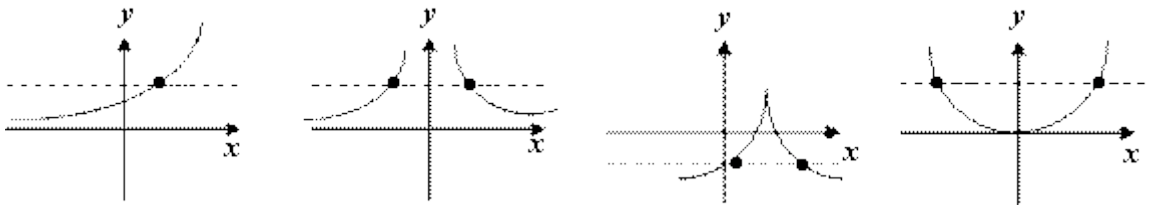


يك به يك نيست زيرا خط موازي محور x ها تابع را در 3 نقطه قطع كرده است

يك به يك است

يك به يك نيست

۱۷-كدام شكل نمودار تابع يك به يك است؟



حل:

يك به يك نيست

يك به يك نيست

يك به يك نيست

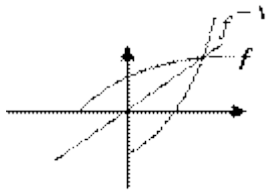
يك به يك است

۱۸- معکوس تابع $y=\sqrt{x-۲}$ را بیابید.

حل:

(تابع يك به يك است زيرا به ازاء هر y حداكثر يك x بدست مي‌آيد)

$$y=\sqrt{x-۲} \Rightarrow y^۲=x-۲ \Rightarrow y^۲+۲=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲+۲$$



نکته : نمودار تابع f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند

نکته : اگر دو تابع f و $f^{-۱}$ معکوس یکدیگر باشند، آنگاه :

$$(f^{-۱}of)(x)=x \qquad (fof^{-۱})(x)=x$$
$$(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱} \quad , \quad (gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱} \qquad (f^{-۱})^{-۱}=f$$

۱۹- یک حلزون تصمیم می گیرد از یک نهال ۱ متری بالا برود و خودش را به نوک نهال برساند . این حلزون، بیش از ۶۰ دقیقه ی متوالی نمی تواند حرکت کند و بعد از هر ۱ ساعت حرکت، نیاز به ۱ ساعت خواب دارد. حلزون در هر یک ساعتی که حرکت می کند، ۲ سانتی متر بالا می رود، اما در یک ساعت بعدی که می خوابد، ۱ سانتی متر به پایین سر می خورد. رابطه‌ی بین ارتفاعی از نهال که حلزون در پایان هر ساعت در آن قرار دارد (برحسب سانتی متر) و مدت زمانی که حلزون از لحظه ی شروع حرکتش تا رسیدن به آن ارتفاع سپری کرده (برحسب ساعت) را تا اولین لحظه که حلزون به نوک نهال می رسد. در نظر بگیرید. دامنه و برد این رابطه چیست؟ آیا این رابطه، تابع است؟

حل:

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
ارتفاع (سانتی متر)	۲	۱	۳	۲	۴	۳	۵	۴	...

می بینیم که وقتی اعداد مربوط به ساعت فرد است (حلزون بالا می رود)، ارتفاع های *2,3,4,5,...* به دست می آید. در واقع، اگر ساعت $2n-1$ باشد، ارتفاع $n+1$ است. هم چنین وقتی اعداد مربوط به ساعت زوج است (حلزون به پایین سر می خورد)، ارتفاع های *1,2,3,4* را داریم. در واقع، اگر ساعت $2n$ باشد، ارتفاع n است.

این طوری، یک ارتفاع در دو زمان به دست می آید، مثلاً ارتفاع ۲ در زمان های ۱ و ۴، یا ارتفاع ۳ در زمان های ۳ و ۶ به دست آمده است. ببینیم ارتفاع ۱۰۰(۱متر یا همان طول نهال) در چه زمان هایی به دست می آید.

دو حالت داریم:

حالت اول: $100 =$

حالت دوم: $100 =$

سؤال به اولین باری که حلزون به نوک نهال می رسد اشاره کرده (حالت دوم قبول نیست)، پس جدول زیر را داریم و هیچ چیز اضافی دیگری نداریم:

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۰۰۰	۱۹۷
ارتفاع (سانتی متر)	۲	۱	۳	۲	۴	۳	۵	۴	۰۰۰	۱۰۰

دامنه ی این رابطه، همان زمان هاست: $\{1,2,3,4,\dots,197\}$:دامنه

برد این رابطه، همان ارتفاع هاست: $\{2,1,3,2,4,3,5,4,\dots,100\} = \{1,2,3,4,\dots,100\}$:برد

تابع بودن این رابطه هم واضح است، چون به ازای هیچ زمانی، دو ارتفاع نداریم (اگرچه به ازای اکثر ارتفاع ها، دو زمان داریم).

۲۰- حداقل چند نقطه از نمایش هندسی $\{(n,n^3)|n \in \mathbb{Z}, -10 \le n \le 10\}$ در دستگاه مختصات حذف کنیم تا نمودار حاصل مربوط به تابعی خطی باشد؟

حل: یک حالت این است که به جای (n,n^3) داشته باشیم (n,n) تا تابع خطی شود . اگر عرض ها را مساوی قرار دهیم، داریم:

$$n^3 = n \Rightarrow n^3 - n$$

پس در این حالت فقط باید سه نقطه ی $(-1,-1)$، $(0,0)$ و $(1,1)$ را باقی بگذاریم. چون $n \in \mathbb{Z}$ و $-10 \le n \le 10$ بود، نمودار تابع اولیه ی ما ۲۱ نقطه داشت. سه تا را باقی بگذاریم، یعنی ۱۸ تا را حذف کنیم. (این حداقل تعداد حذف ممکن است، مثلاً اگر ۲۰ نقطه را هم حذف کنیم. آن چه می ماند تابعی تک عضوی و خطی است.)

اگر به روند حل بالا نگاه کنید، حالت های دیگری را هم می یابید؛ می توانیم به جای (n,n^3) داشته باشیم (n,k^2n) که $k = 1,2,\dots,10$. با توجه به حل بالا، در این حالت ها هم سه نقطه باقی می مانند که طول آن ها $o,-k$ و k است. پس جواب مسئله در هر صورت، ۱۸ است.

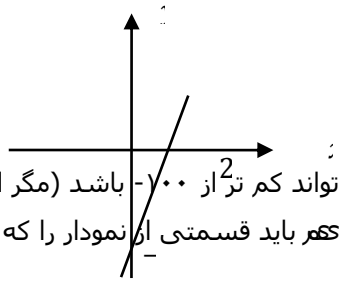
۲۱- با سرمایه ی اولیه ی صد میلیون تومان یک کارگاه تولید مبل راه اندازی کرده ایم . با تولید ۲۰ دست مبل، سرمایه ی اولیه مان برمی گردد و مقدار سود کارگاه تابعی خطی برحسب تعداد (دست) مبل های تولید شده است. نمودار این تابع را رسم کنید.

حل:تعداد (دست) مبل ها را x و سود را y می گیریم، چون y تابعی خطی از x است، اعداد a و b وجود دارند که $y = ax + b$. اگر هیچ مبلی تولید نکنیم، صد میلیون تومان عقبیم (سرمایه ی اولیه). یعنی به ازای $x = 0$، y می شود ۱۰۰- (برای راحتی کار، واحد y را میلیون تومان در نظر گرفتیم نه تومان). پس:

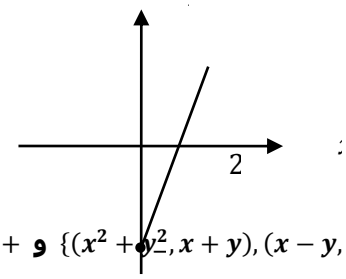
$-100 = a \times 0 +$

اگر $y, x = 20$ می شود صفر (فقط سرمایه ی اولیه برمی گردد و هنوز سودی نکرده ایم). پس: $y = ax -$
$100 \Longrightarrow 0 = a \times 20 - 100 \Longrightarrow a = 5$

با این حساب، تابع مورد نظر (سود برحسب تعداد دست مبل)، $y = 5x - 100$ است. $\begin{bmatrix} 0 \\ -100 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$ دو نقطه از نمودار این تابع اند. آن ها را به هم وصل می کنیم؛ می شود نمودار روبه رو:



اما دقت کنید. نه x می تواند منفی باشد (چون تعداد است)، نه y می تواند کم تر از ۱۰۰- باشد (مگر این که از جایی وام بگیریم، خرجش کنیم و نتوانیم پس بدهیم). می‌خواهیم بگوییم باید قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور yهاست حذف کنیم. می‌شود نمودار روبه رو:



۲۲- به ازای چه مق‌ادیری از x و y ، دو رابطه ی $\{(x^2 + y^2, x + y), (x - y, 5), (2x - y, 2)\}$ و $\{(x + 1, 0), (2y + 1, -1), (2y - x, 5)\}$ وارون یکدیگرند؟

حل:باید زوج هایی را که در رابطه ی اول داریم، در رابطه ی دوم هم داشته باشیم، البته با این تفاوت که جای مؤلفه های اول و دومشان عوض شده باشد با این حساب، $x^2 + y^2$ که یکی از مؤلفه های اول رابطه ی اول است، باید با یکی از مؤلفه های دوم رابطه ی دوم، یعنی یکی از اع داد ۰، ۱- یا ۵ مساوی باشد $x^2 + y^2 = -1$ که ممکن نیست؛ اگر $x^2 + y^2 = 0$ باشد، آن گاه $x = y = 0$ و دو رابطه به شکل $\{(0,0), (0,5), (0,2)\}$ و $\{(1,0), (1,-1), (0,5)\}$ درمی آیند که وارون هم نیستند. پس $x^2 + y^2 = 5$.

در این صورت باید داشته باشیم $x + y = 2y - x$. از تساوی اخیر نتیجه می شود $y = 2x$. حالا:

$x^2 + y^2 = 5 \xrightarrow{y=2}$

اگر $x = -1$ باشد، آن گاه $y = -2$ و دو رابطه به شکل زیر درمی آیند:

$\{(5, -3), (1,5), (0$

این دو رابطه وارون هم نیستند، پس $x = -1$ قبول نیست.

اگر $x = 1$ باشد، آن گاه $y = 2$ و دو رابطه به شکل زیر درمی آیند:

$\{(5,3), (-1,5), (0,$

این دو رابطه وارون هم اند $x = 1$ و $y = 2$ جواب مسئله است.

۲۳- یک رابطه هر عدد گویا را به مربع آن عدد و هر عدد گنگ را به مکعب آن عدد نظیر می کند . وارون این رابطه هر یک از اعداد ۲، ۴، ۱۶- و ۶۴ را به چه اعدادی نظیر می کند؟ آیا این رابطه و وارونش تابع هستند؟

حل: مثل این است که بگوییم خود رابطه (نه وارونش) به چه اعدادی، اعداد ۲، ۴، ۱۶- و ۶۴ را نظیر می کند. یعنی چه اعدادی را به این چهارتا می برد. باید حالت های مختلف را در نظر بگیریم.

۲ مربع $\pm\sqrt{2}$ و مکعب $\sqrt[3]{2}$ است. $\pm\sqrt{2}$ گویا نیست، پس قبول نیست (رابطه، هر عددی را مربع نمی کند، بلکه فقط اعداد گویا را مربع می کند). $\sqrt[3]{2}$ گنگ است و قبول است.

۴ مربع ± 2 و مکعب $\sqrt[3]{4}$ است. هر سه قبول اند.

۱۶- مربع چیزی نیست و مکعب $-\sqrt[3]{16}$است که چون گنگ است، قبولش می کنیم.

۶۴ مربع ± 8 و مکعب ۴ است. ± 8 گویا و قبول اند. ۴ گنگ نیست و قبول نیست (رابطه، هر عددی را مکعب نمی کند، بلکه فقط گنگ ها را مکعب می کند.)

نتیجه این است: وارون رابطه، ۲ را به $\sqrt[3]{2}$، ۴ را به ± 2 و $\sqrt[3]{4}$، ۱۶- را به $-\sqrt[3]{16}$ و ۶۴ را به ± 8 نظیر می کند.

چون وارون رابطه، بعضی اعداد را به چند عدد نظیر می کند، تابع نیست . اما خود رابطه تابع است، چون هر عدد را یا مربع می کند یا مکعب. مربع و مکعب هم منحصربه فردند.

۲۴- به ازای چه مقدارهایی از a، رابطه ی $\{(a^6+1, a^2), (a^7+1, 4a-4), (a^8+1, 1)\}$ تابعی یک به یک است؟

حل:یک به یک بودن زمانی اتفاق می افتد که مؤلفه های دوم متمایز باشند، یا در صورت داشتن مؤلفه های دوم مساوی، مؤلفه های اولشان هم مساوی باشد . در این رابطه (رابطه‌ی داده شده در سؤال)، سه حالت برای تساوی مؤلفه های دوم وجود دارد:

حالت اول:$a^2 = 4a - 4$: در این صورت $a^2 - 4a + 4 = 0$، پس $(a-2)^2 = 0$ و در نتیجه $a = 2$. با این حساب، رابطه ی ما به این صورت می شود:

$\{(65,4), (129,4),$

حالت دوم: $a^2 = 1$: در این صورت $a = \pm 1$.

اگر $a = 1$ باشد، رابطه به این شکل می شود:

$\{(2,1), (2,0), (2,1$

و اگر $a = -1$ باشد، رابطه به این شکل است:

$\{(2,1), (0,-8), (2$

حالت سوم: $4a - 4 = 1$: در این صورت $a = \frac{5}{4}$ و رابطه این شکلی است:

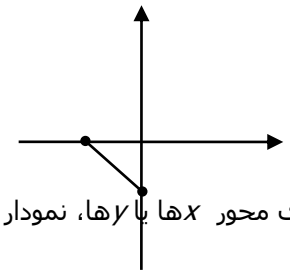
$$\left\{\left((\frac{5}{4})^6+1,\frac{25}{16}\right),(\right.$$

تا این جا به ازای $a=2$، $a=1$ و $a=\frac{5}{4}$ تابع یک به یک نداریم. این نتیجه با محور قرار دادن یک به یکی و بررسی حالت های تساوی مؤلفه های دوم به دست آمد . اما چون تابع بودن هم مهم است، حالت های تساوی مؤلفه های اول را نیز باید بررسی کنیم . تساوی $a^6+1=a^7+1$ که به صورت $a^6=a^7$ درمی آید، به ازای $a=0$ و $a=1$ برقرار می شود . تساوی $a^6+1=a^8+1$ به ازای $a=0$ و $a=\pm1$ و تساوی $a^7+1=a^8+1$ نیز به ازای $a=0$ و $a=1$ برقرار می گردد. $a=\pm1$ قبلاً بررسی شده. پس فقط $a=0$ را بررسی می کنیم؛ به ازای $a=0$ رابطه به این شکل است:

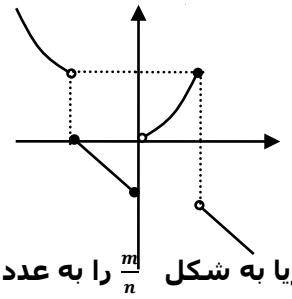
$$\{(1,0),(1,-4),(1$$

پس رابطه ی مورد نظر، به ازای تمام مقادیر حقیقی a، به جز ۲، ۱، $\frac{5}{4}$ و صفر، تابعی یک به یک است.

۲۵- شکل روبه رو، قسمتی از نمودار تابع یک به یک f را نشان می دهد . بقیه ی نمودار f، ازسه قسمت مجزا شبیه ، و تشکیل شده است . اگر دامنه و برد f برابر با $\mathbb{R}$ باشد، نمودار کامل f چگونه است؟



حل:باید سه قسمت دیگر را طوری کنار قسمت رسم شده قرار دهید که هر خط موازی محور xها یا yها، نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع کند :



۲۶- یک رابطه با دامنه ی $\mathbb{Q}$ به این صورت تعریف شده که هر عدد گویا به شکل $\frac{m}{n}$ را به عدد $m+n$ نظیر می کند ($n\neq0, m,n\in\mathbb{Z}$ و بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک m و n برابر با ۱ است). آیا این رابطه، تابع است؟ وارون آن چه طور؟

حل:خود رابطه تابع است . چون هر $\frac{m}{n}$ را به یک $m+n$ می برد. اما وارون آن تابع نیست. چون رابطه یک به یک نیست. مثلاً $\frac{2}{5}$ را به $2+5=7$ می برد و $\frac{5}{2}$ را هم به $5+2=7$.

۲۷-مجموعه جواب نامعادله ی $\frac{1}{\sqrt{x-1}}\leq\frac{3}{2}-\sqrt{x-1}$ برابر با بازه ی $(2a,a^2+1)$ است؛ مقدار a چیست؟

حل:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}}\leq\frac{3}{2}-\sqrt{x}$$

$\sqrt{x-1}$ در صورتی که تعریف شده باشد (به ازای xهایی که $1 \leq x$)، نامنفی است و البته چون سر از مخرج درآورده، صفر هم نباید باشد (باید $1 < x$). خلاصه این که $\sqrt{x-1}$ مثبت است و جمع یک عدد مثبت یا معکوسش هم حداقل ۲ است. پس $\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ نمی تواند کم تر از ۲ (مثلاً $\frac{3}{2}$)باشد. با این حساب، نامعادله ی موردنظر دچار فقدان جواب است یعنی مجموعه ی جواب آن تهی است.

بنابراین:

$(2a, a^2$

$\Rightarrow a =$

حواستان بود که بازه ی باز (m,n) وقتی تهی می شود که $m \geq n$

۲۸- اگر تابع f به صورت $f=\{(n,3n-1)|n\in\mathbb{N}\}$ باشد، حاصل $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)$ چیست؟

حل: دنباله ای حسابی با قدر نسبت ۳ و جمله ی اول $3\times1-1=2$ داریم. هر تابع با دامنه ی $\mathbb{N}$ (یا زیرمجموعه ای از $\mathbb{N}$) یک دنباله است و اگر ضابطه ی این دنباله خطی باشد، دنباله حسابی است و ضریب n هم می شود قدر نسبت دنباله . ما مجموع صد جمله ی اول این دنباله را می خواهیم . جواب می شود تعداد جملات ضرب در میانگین جملات اول و آخر. جمله ی اول $f(1)=2$ و جمله ی آخر (صدم)، $f(100)=3\times100-1=299$ است، پس:

$f(1)+f(2)+\cdots$

لزومی نداشت فرمول مجموع جملات دنباله ی حسابی $(S_n=n\times\frac{a_1+a_n}{2})$ را بلد باشیم. مجموع صد جمله ی اول دنباله ی حسابی موردنظر (با جمله ی اول ۲ و قدر نسبت ۳) این طوری است:

جای شکل

$\text{جمع} = \frac{\text{تعداد}}{2}\times 30$

۲۹- اگر به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(3-2x)=x^2+6x$ باشد، مقدار تابع f به ازای $x=4$ چیست؟

حل:تابع f، $3-2x$ را به x^2+6x می برد، می خواهیم ببینیم ۴ را به چه چیزی می برد . خب ۴ را با $3-2x$ مساوی قرار می دهیم و xی را که به دست می آید، در x^2+6x می‌گذاریم:

$3-2x=4 \Rightarrow 2x$

$x^2+6x \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}}$

۳۰- f تابعی خطی است به گونه ای که $f(3)+f^{-1}(3)=0$ و $f(5)+f^{-1}(11)=8$، حاصل $2f^{-1}(5)-5f(2)$ چیست؟

حل: f تابعی خطی است، پس ضابطه ی آن به شکل $y = ax + b$ است. اگر $a \neq 0$ باشد، f وارون پذیر است و ضابطه ی وارون آن با جابه جاکردن x و y و محاسبه ی y از رابطه ی جدید به دست می آید.

$x =$:ضابطه ی f^{-1}

پس $f(x) = ax + b$ و $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$. حالا:

$f(3) + f^{-1}(3) =$

$f(5) + f^{-1}(11) =$

رابطه ی اول را از رابطه دوم کم می کنیم؛ داریم:

$2a^2 + 8 = 8a \quad -$

$3a^2 + ab + 3 - b$

پس $f(x) = 2x - 15$ و $f^{-1}(x) = \frac{x+15}{2}$. با این حساب:

$2f^{-1}(5) - 5f(2)$