۱) اگر $F(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۴}}$ باشد حاصل $F^{-۱}(\sqrt{۶})$ را بدست آورید .

حل :

$$x-۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۴ \qquad \sqrt{۶}\in D_{f^{-۱}} \qquad \sqrt{۶}\in R_F$$

$$\sqrt{۶}=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۴}} \Rightarrow ۶=x+۲\sqrt{x-۴} \Rightarrow ۶-x=۲\sqrt{x-۴} \Rightarrow (۶-x)^۲=۴(x-۴)$$

$$\Rightarrow ۳۶+x^۲-۱۲x=۴x-۱۶ \Rightarrow x^۲-۱۶x+۵۲=۰ \Rightarrow \{x=۸\pm\sqrt{۱۲}$$

۲) آیا دو تابع روبرو با هم برابرند؟

$$f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}\ , g(x)=\cos x$$

حل :

$$f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}=\sqrt{\cos^۲ x}=|\cos x|\neq g(x)$$

خیر زیرارابطه ها برابر نیست .

۳) توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می آید .

$$g(x)=۲\sqrt{x-۱}+۳ ,\ f(x)=\sqrt{x}$$

حل :

نمودار $y=\sqrt{x}$ را به اندازه یک واحد در امتداد جهت مثبت محور x ها منتقل می کنیم تا نمودار $y=\sqrt{x-۱}$ به دست می آید. عرض نقاط این منحنی را دو برابر کنیم تا $y=۲\sqrt{x-۱}$ به دست می آید . این نمودار را نسبت بـه محور x ها قرینه می کنیم سپس ۳ واحد به سمت بالا منتقل می کنیم .

۴) تابع f صعودی و از مبداء می گذرد . دامنه ی تعریف تابع g با ضابطه ی $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام مجموعه است ؟

حل :

$$\Rightarrow x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\leq f(x_۲)$$

$$\Rightarrow f(۰)=۰$$

$$x<۰ \Rightarrow f(x)\leq f(۰) \rightarrow f(x)\leq ۰ \Rightarrow xf(x)\geq ۰$$

$$x>۰ \rightarrow f(۰)\leq f(x) \rightarrow ۰\leq f(x) \Rightarrow xf(x)\geq ۰$$

$$x=۰ \rightarrow f(x)=۰ \rightarrow xf(x)=۰$$

بنابراین برای تمام اعضای D_f رادیکال تعریف شده است . پس $D_f=D_g$

۵) دوره تناوب تابع با ضابطه ی $f(x)=(-۱)^{[x]}(x-[x])$ را بدست آورید ؟

حل :

$$f(x+T)=f(x)(T>۰)\Rightarrow f(x+T)=(-۱)^{[x+T]}(x+T-[x+T])$$

برای اینکه رابطه ی یک برابر باشد باید اولاً T صحیح باشد :

$$f(x+T)=(-۱)^{[x]+T})x+T-[x]-T)=(-۱)^{[x]}(-۱)^{T}(x-[x])$$

ثانیاً : باید Tزوج باشد ، زیرا باید $(-۱)^{T}=۱$: بنابراین $T=۲$.

۶) فرض کنیم $g(x)=x-\frac{۱}{x},\ fog(x)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۴$ در این صورت ضابطه ی $f(x)$ را بیابید ؟

حل :

$$f(g(x))=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۴=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲-۲=(x-\frac{۱}{x})^{۲}-۲$$

$$\Rightarrow f(x-\frac{۱}{x})=(x-\frac{۱}{x})^{۲}-۲\rightarrow f(t)=t^{۲}-۲$$

۷) اگر $g(x)=\cos ۳x,\ f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ باشند . دوره تناوب $(fg)(x)$ را بدست آورید .

حل :

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\cos(\mathrm{x}+\frac{\pi}{4}).\cos ۳x$$

$$=\frac{۱}{۲}[\cos(4\mathrm{x}+\frac{\pi}{4})+\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})]$$

$$\mathrm{T}_1=\frac{\pi}{۲}\ \text{و}\ T_{۲}=\pi$$

$$T=\pi(\text{ک م م}\ T_{۱}\ \text{و}\ T_{۲})$$

۸) a را طوری بیابید که $f(x)=\log(\sqrt{a^{۲}x^{۲}+۱}+۵x)$ یک تابع فرد باشد ؟

حل :

$$f(x)+f(-x)=۰$$

$$\log(\sqrt{a^{۲}x^{۲}+۱}-۵x)+\log(\sqrt{a^{۲}x^{۲}+۱}+۵x)=۰\Rightarrow \log(\sqrt{a^{۲}x^{۲}+۱})^{۲}-(۵x)^{۲})=۰$$

$$\log(a^{۲}x^{۲}+۱-۲۵x^{۲})=۰=\log ۱\Rightarrow a^{۲}x^{۲}=۲۵x^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۲۵\Rightarrow a=\pm ۵$$

۹) اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد آنگاه $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ را بیابید .

حل :

$$x^۲+x<۰ \Rightarrow -۱<x<۰ \Rightarrow \begin{cases} [x]=-۱ \\ [x^۲]=۰ \\ [x^۳]=-۱ \\ [x^۴]=۰ \end{cases} \Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=۰+(-۱)+۰+(-۱)=-۲$$

۱۰) دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{۴-x^۲}}{\sqrt{|x|-x}}$ را به دست آورید .

حل :

$$\begin{cases} ۴-x^۲ \geq ۰ \to x^۲ \leq ۴ \to -۲ \leq x \leq ۲ \\ |x|-x>۰ \to |x|>x \to x<۰ \end{cases} \Rightarrow D_f=[-۲,۰)$$

۱۱) برد تابع $f(x)=\sqrt{۵-|x|}$ را به دست آورید .

حل :

$$y=\sqrt{۵-|x|} \to y \geq ۰ \quad (۱)$$

$$y^۲=۵-|x| \to |x|=۵-y^۲ \to ۵-y^۲ \geq ۰ \to y^۲ \leq ۵ \to -\sqrt{۵} \leq y \leq \sqrt{۵} \quad (۲)$$

$$۱,۲ \to R_f=[۰,\sqrt{۵}]$$

۱۲) اگر توابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x}$, $g(\dfrac{۱}{x})=|x+a^۲|$ مفروض باشد . مقدار a را طوری به دست آورید که داشته باشیم . $g(f(۲))=۴$

حل :

$$f(۲)=\frac{۱}{۲} \to g(f(۲))=g(\frac{۱}{۲})=۴ \to |۲+a^۲|=۴ \to$$

$$\begin{cases} ۲+a^۲=۴ \to a^۲=۲ \to a=\pm\sqrt{۲} \\ ۲+a^۲=-۴ \to a^۲=-۶ \to \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۳) اگر تابع $y=x^۴+۳x^۳+A(x+۱)^۳+Bx$ زوج باشد $A+B$ چقدر است.

حل :

چون تابع زوج است . پس باید $f(x)=f(-x)$ باشد .

$$f(x)=x^4+3x^3+Ax^3+3Ax^2+3Ax+A+Bx$$

$$f(-x)=f(x)\to 6x^3+2Ax^3+6Ax+2Bx=0\to\begin{cases}6+2A=0\to A=-3\\ 6A+2B=0\to B=9\end{cases}$$

۱۴) اگر $g(x)=[x+1]$ و $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$ باشند مطلوبست دامنه ی تابع fog

حل :

$D_g=R$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix}x-3\geq 0\to x\geq 3\\ 3-x\geq 0\to x\leq 3\end{matrix}\right\}\to D_f=\{3\}$

$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid \lfloor x+1\rfloor=3\}=\{x\in R|3\leq x+1<4\}=[2,3)$

۱۵) با فرض $f(x)=2x+5$ و $g(x)=x-\frac{1}{2}$ ضابطه ی $g^{-1}of^{-1}$ را بنویسید .

حل :

$$f(x)=2x+5\to y=2x+5\to y-5=2x\to x=\frac{y-5}{2}\to f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$$

$$g(x)=x-\frac{1}{2}\to y=x-\frac{1}{2}\to x=y+\frac{1}{2}\to g^{-1}(x)=x+\frac{1}{2}$$

$$g^{-1}of^{-1}(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=g^{-1}(\frac{x-5}{2})=\frac{x-5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x-4}{2}$$

۱۶) آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ مساویند ؟

حل :

$$D_f:\{x(x-1)\geq 0\to D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\ ,\ D_g:\begin{cases}x\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\to x\geq 1\to D_g=[1,+\infty)$$

x	۰ ۱
$x(x-1)$	+ ۰ − ۰ +

چون دامنه دو تابع برابر نیست بنابراین با هم مساوی نیستند .

۱۷) دامنه ی تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{-|x|+2}}{|x|-2}$ را بیابید .

حل :

$$\left.\begin{array}{l} -|x|+۲\ge ۰\to |x|\le ۲\to -۲\le x\le ۲ \\ |x|-۲\ne ۰\to |x|\ne ۲\to x\ne \pm ۲ \end{array}\right\}\to -۲<x<۲\to D_f=(-۲,۲)$$

۱۸) f تابعی یک به یک و $f^{-۱}$ وارون آن است : الف) معکوس تابع $g(x)=۱-۲f(x+۳)$ را بیابید .

ب) معکوس تابع $h(x)=۱+۲f(x-۳)$ را بیابید .

حل الف)

$$y=۱-۲f(x+۳)\to x=۱-۲f(y+۳)\to ۱-x=۲f(y+۳)\to f(y+۳)=\frac{۱-x}{۲}\to$$

$$f^{-۱}(f(y+۳))=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})\to y+۳=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})\to y=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})-۳\to g^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})-۳$$

حل ب)

$$y=۱+۲f(x-۳)\to x=۱+۲f(y-۳)\to x-۱=۲f(y-۳)\to f(y-۳)=\frac{x-۱}{۲}\to$$

$$f^{-۱}(f(y-۳))=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})\to y-۳=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})\to y=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۳\to$$

$$h^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۳$$

۱۹) تابع f معکوس پذیر است و تابع g در رابطه ی $g(x)=\frac{۲f(\sqrt{x})}{۳-۵f(\sqrt{x})}$ صدق می کند $(x>۰)$

وارون تابع g را بر حسب تابع f بدست آورید .

حل : ابتدا $g(x)$ را مساوی y قرار می دهیم .

$$y=\frac{۲f(\sqrt{x})}{۳-۵f(\sqrt{x})}\to ۳y-۵yf(\sqrt{x})=۲f(\sqrt{x})$$

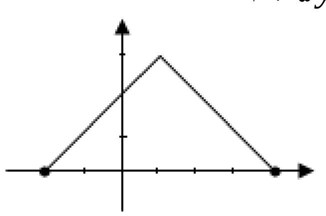
$$۳y=f(\sqrt{x})(۲+۵y)\to f(\sqrt{x})=\frac{۳y}{۲+۵y}$$

f تابعی وارون پذیر است از طرفین $f^{-۱}$ می گیریم .

$$f^{-۱}(f(\sqrt{x}))=f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y})\to \sqrt{x}=f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y})\to x=(f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y}))^۲$$

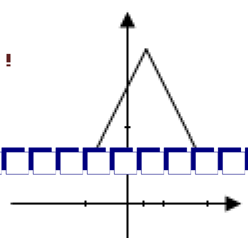
$$\xrightarrow{x=g^{-۱}(y)} g^{-۱}(y)=(f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y}))^۲\to g^{-۱}(x)=(f^{-۱}(\frac{۳x}{۲+۵x}))^۲$$

۲۰) اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد .



الف) دامنه و برد تابع f را بنویسید .

حل :



$$D_f=[-۲,۴]$$
$$R_f=[۰,۳]$$

ب) دامنه و برد تابع $f(۲x)+۱$ را تعیین کرده و نمودار آنرا رسم کنید .

حل :

$$-۲\le ۲x\le ۴\rightarrow -۱\le x\le ۲\rightarrow D=[-۱,۲]$$
$$۰\le f(۲x)\le ۳\rightarrow ۱\le f(۲x)+۱\le ۴\rightarrow R=[۱,۴]$$

۲۱) زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=|x|+x\sin x$ را مشخص کنید .

حل :

$D_f=R$ متقارن است . (۱)

$$f(-x)=|-x|+(-x)\sin(-x)=|x|-x(-\sin x)=|x|+x\sin x=f(x) \qquad (۲)$$

$\xrightarrow{(۱),(۲)}$ تابع زوج می باشد

۲۲) دامنه و برد تابع زیر را بیابید .

$$f(x)=\frac{\sqrt{[x]-۲}}{\sqrt{۴-[x]}}$$

حل :

$$D_f:\begin{cases}[x]-۲\ge ۰\rightarrow [x]\ge ۲\rightarrow x\ge ۲\\ ۴-[x]>۰\rightarrow [x]<۴\rightarrow x<۴\end{cases}\rightarrow D_f=[۲,۴)$$

$$R_f:\begin{cases}۲\le x<۳\rightarrow f(x)=۰\\ ۳\le x<۴\rightarrow f(x)=۱\end{cases}\rightarrow R_f=\{۰,۱\}$$

۲۳) اگر $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$ تابع $f(g(x))$ را با دامنه اش مشخص کنید . هم چنین اگر $h(x)=[x]$ تابع $f(h(x))$ را با دامنه اش مشخص کنید .

حل :

$$D_f:۹-x^۲\ge ۰\rightarrow ۹\ge x^۲\rightarrow ۳\ge |x|\rightarrow -۳\le x\le ۳\rightarrow D_f=[-۳,۳]$$
$$D_g:۲-x\ge ۰\rightarrow ۲\ge x\rightarrow D_g=(-\infty,۲]$$
$$\left.\begin{array}{l} D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in(-\infty,۲] \mid \sqrt{۲-x}\in[-۳,۳]\}\\ \sqrt{۲-x}\in[-۳,۳]\rightarrow \sqrt{۲-x}\le ۳\rightarrow ۲-x\le ۹\rightarrow x\ge -۷\end{array}\right\}\rightarrow D_{fog}=[-۷,۲)$$
$$f(g(x))=\sqrt{۹-۲+x}=\sqrt{x+۷}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_{foh}=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid [x]\in[-۳,۳]\} \\ [x]\in[-۳,۳]\rightarrow -۳\le x<۴ \end{array}\right\}\rightarrow D_{foh}=[-۳,۴)$$

۲۴) اگر $f(۶)=۱۲$ آنگاه ریشه های معادله $f^{-۱}(\frac{x}{x+۲})=۶$ را محاسبه کنید .

حل :

$$f(f^{-۱}(\frac{x}{x+۲}))=f(۶)\rightarrow \frac{x}{x+۲}=۱۲\rightarrow x=۱۲x+۲۴\rightarrow ۱۱x=-۲۴\rightarrow x=\frac{-۲۴}{۱۱}$$

۲۵) دامنه تابع زیر را به دست آورید .

$$f(x)=\sqrt{[x]^۲-۵[x]+۴}$$

حل :

$$[x]^۲-۵[x]+۴\ge ۰\rightarrow P=([x]-۱)([x]-۴)\ge ۰\rightarrow \begin{cases}[x]=۱\rightarrow ۱\le x<۲\\ [x]=۴\rightarrow ۴\le x<۵\end{cases}$$

x	$-\infty$ ۱ ۲	۴ ۵	$+\infty$
$[x]-۱$	− ∘ ∘	+ + +	+
$[x]-۴$	− −	− ∘ ∘	+
P	+ ∘ ∘	− ∘ ∘	+

$$D_f=(-\infty,۲]\cup[۴,+\infty)$$

۲۶) توابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ مفروضند.

الف)مقدار $(\frac{۲f-g}{f})(-۲)$ را به دست آورید.

ب) دامنه ی تابع gof را به کمک تعریف به دست آورید.

حل الف)

$$f(-۲)=\sqrt{۳},g(-۲)=\frac{۱}{۳}\rightarrow (\frac{۲f-g}{f})(-۲)=\frac{۲f(-۲)-g(-۲)}{f(-۲)}=\frac{۲\sqrt{۳}-\frac{۱}{۳}}{\sqrt{۳}}$$

حل ب)

$$D_f=(-\infty,۱],D_g=R-\{\pm۱\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f,f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,۱],\sqrt{۱-x}\in R-\{\pm۱\}\}$$

$\sqrt{۱-x}\ne -۱$ همواره برقرار و $\sqrt{۱-x}\ne ۱\rightarrow x\ne ۰\rightarrow D_{gof}=(-\infty,۱]-\{۰\}$

۲۷) در مستطیلی با محیط ۴۰ سانتی متر مربع عرض مستطیل را به شکل تابعی از مساحت آن بیان کنید.

حل :

طول مستطیل $b =$ و عرض مستطیل $a =$ و مساحت مستطیل $S =$

$$p = ۲(a+b) = ۴۰ \to a+b = ۲۰ \to b = ۲۰ - a , s = ab \to s = a(۲۰-a) = ۲۰a - a^۲$$

$$a^۲ - ۲۰a + s = ۰ \to a = ۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - s} \to (a \leq ۱۰) a = ۱۰ - \sqrt{۱۰۰ s}$$

۲۸) زوج یا فرد بودن توابع روبرو را مشخص کنید .

الف) $f(x) = \dfrac{x^۲}{[x] + [-x]}$

ب) $f(x) = ۳^x$

حل الف) $D_f = R - Z$ متقارن است .

$$f(-x) = \frac{(-x)^۲}{[-x]+[x]} = \frac{x^۲}{[-x]+[x]} = f(x)$$

بنابراین تابع f تابعی زوج است .

حل ب) $D_f = R$ متقارن است .

$$f(-x) = ۳^{-x} = \frac{۱}{۳^x} = \frac{۱}{f(x)}$$

این تابع نه زوج است و نه فرد .

۲۹) مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۲۰ سانتی متر است طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از محیط آن به دست آورید.

حل :

(مساحت $S =$ و طول وتر $c =$ ومحیط $P =$)

$$S = ۲۰ = \frac{۱}{۲} ab \to ab = ۴۰ \to c^۲ = a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab \to (a+b)^۲ = c^۲ + ۲ab$$

$$(ab = ۴۰) \to (a+b)^۲ = c^۲ + ۸۰ \to a+b = \sqrt{c^۲ + ۸۰}$$

$$(p = a+b+c) \to p = \sqrt{c^۲ + ۸۰} + c \to (p-c)^۲ = c^۲ + ۸۰ \to p^۲ - ۸۰ = ۲pc$$

$$\to c = \frac{p^۲ - ۸۰}{۲p}$$

۳۰) اگر $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x \rangle ۰ \\ x-۱ & x \leq ۰ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x \geq -۲ \\ x-۲ & x \langle -۲ \end{cases}$ ضابطه تابع $f + ۲g$ را بنویسید.

حل :

$$(f+۲g)(x)=\begin{cases}۳x-۵ & x<-۲\\ ۳x-۱ & -۲\leq x\leq ۰\\ ۳x+۱ & x>۰\end{cases}$$

۳۱) اگر $f(\sqrt{2}\sin x)=\cos 2x$ آنگاه $f(\cos x)$ را بیابید.

حل :

$$f(\sqrt{2}\sin x)=\cos 2x \Rightarrow f(\sqrt{2}\sin x)=1-2\sin^2 x$$

$$\sin x=t \Rightarrow f(\sqrt{2}t)=1-2t^2$$

$$\sqrt{2}t=a \Rightarrow t=\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(a)=1-2(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 \Rightarrow f(a)=1-a^2$$

$$f(\cos x)=1-\cos^2 x \Rightarrow f(\cos x)=\sin^2 x$$

۳۲) معکوس تابع $f(x)=x+۴+۴\sqrt{x}$ را بدست آورید.

حل :

$$f(x)=(\sqrt{x}+۲)^۲$$

$$y=(\sqrt{x}+۲)^۲ \to \pm\sqrt{y}=\sqrt{x}+۲ \xrightarrow{(\sqrt{x}+۲)>۰} \sqrt{y}=\sqrt{x}+۲$$

$$\to \sqrt{y}-۲=\sqrt{x} \to \sqrt{x}-۲=\sqrt{y} \to x+۴-۴\sqrt{x}=y$$

$$\to f^{-۱}(x)=x+۴-۴\sqrt{x}$$

۳۴) اگر $f(x^۲+x)=x^۴+۲x^۳+x^۲$ باشد آنگاه $f(\sqrt{۳})$ چقدر است؟

حل :

$$f(x^۲+x)=(x^۲+x)^۲ \to f(x)=x^۲ \to f(\sqrt{۳})=۳$$

۳۵) دامنه تابع $y=\sqrt{x^۳-x^۲}$ کدام است؟

حل :

$$x^۳-x^۲\geq ۰ \to x^۲(x-۱)\geq ۰ \xrightarrow{x^۲\geq ۰} (x-۱)\geq ۰ \to x\geq ۱ \to D=[۱,+\infty)\cup\{۰\}$$

۳۶) اگر $f(x)=\begin{cases} x-5\,, & x\geq 1 \\ x-1\,, & x<1 \end{cases}$ و $g(x)=x^2-4x+5$ باشند ، ضابطه ی تابع fog را به ازای $x\leq 2$ به دست آورید .

حل :

$$g(x)=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1\geq 1\to fog(x)=(x-2)^2+1-5=x^2-4x$$

۳۷) اگر $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$ ، حاصل $f(\sqrt[3]{2})$ و $f(\log 2)$ را بیابید .

حل :

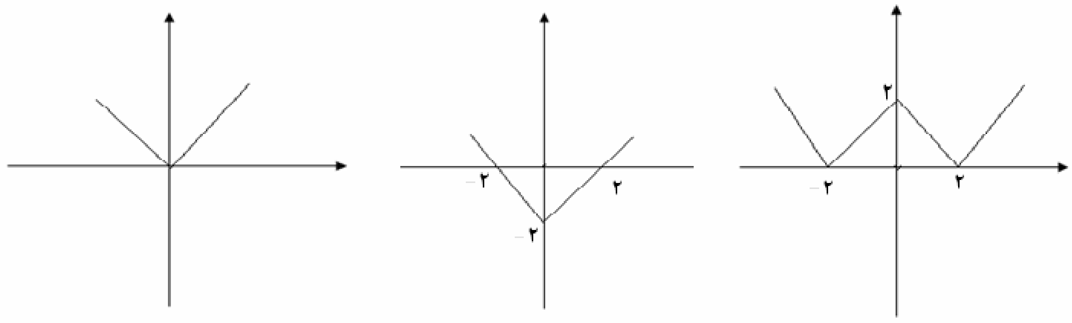
از آنجایی که $\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{8}=2$ پس $\sqrt[3]{2}>1$ و از ضابطه بالا استفاده می کنیم .

$$f(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}$$

و از آنجایی که $\log 2<\log 10$ بنابراین $\log 2<1$ و از ضابطه بالا استفاده می کنیم

$$f(\log 2)=2$$

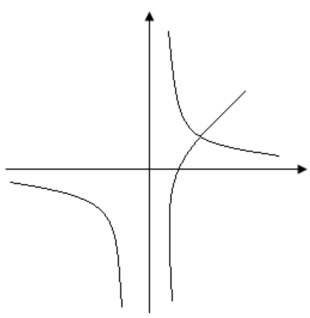
۳۸) منحنی نمایش $f(x)=\big||x|-2\big|$ را رسم کنید .



$y=|x|$ $\quad$ $y=|x|-2$ $\quad$ $y=\big||x|-2\big|$

۳۹) تعداد ریشه های معادله زیر را پیدا کنید .

$$x\log x-1=0$$



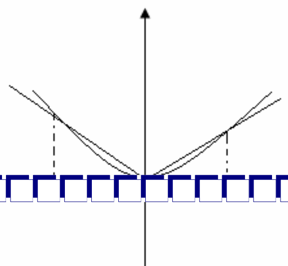
حل :

$$x\log x=1\to \log x=\frac{1}{x}\to y_1=\frac{1}{x}\,,\ y_2=\log x$$

۴۰) مجموعه جواب نامعادله $x^2\leq |x|$ را بیابید .

حل :

دو تابع $y_1=x^2$ و $y_2=|x|$ را رسم می کنیم . در بازه $[-1,1]$ تابع $y=x^2$ پائین یا مساوی نمودار $y=|x|$ است .



۴۱) اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ **آنگاه** $f(۴)$ **را بیابید .**

حل :

در این سوال باید سمت راست را به صورت تابعی از $x+\frac{۱}{x}$ **بنویسیم ، با استفاده از اتحاد** $a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$ **داریم :**

$$f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۲x(\frac{۱}{x})\rightarrow \quad f(t)=t^{۲}-۲\rightarrow \quad f(۴)=۴^{۲}-۲=۱۴$$

۴۲) ضابطه معکوس تابع $y=\sqrt{x}+۱$ **را بیابید .**

حل :

برد این تابع $R_{f}=[۱,+\infty]$ **و تابع یک به یک است .**

$$y=\sqrt{x}+۱\rightarrow$$

$$y-۱=\sqrt{x}\rightarrow \quad x=(y-۱)^{۲}\rightarrow y=(x-۱)^{۲}\rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۲}\ ,[۱,+\infty]$$

۴۳) حاصل $[\log_{۳}۲۸]$ **را بیابید .**

حل :

باید ببینیم که $\log_{۳}۲۸$ **بین کدام دو عدد متوالی است از آنجایی که** $۳^{۳}<۲۸<۳^{۴}$ **پس**

$$\log_{۳}^{۳^{۳}}<\log_{۳}^{۲۸}<\log_{۳}^{۳^{۴}}\rightarrow \quad ۳\log_{۳}^{۳}<\log_{۳}^{۲۸}<۴\log_{۳}^{۳}\rightarrow ۳<\log_{۳}۲۸<۴\rightarrow [\log_{۳}۲۸]=۳$$

۴۴) اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$ و $f(g(x))=۵-x^{۲}$ باشد ضابطه‌ی $g(x)$ را مشخص کنید.

حل :

$$f(g(x))=\frac{۲g(x)+۱}{g(x)-۳}=۵-x^{۲}$$

$$۲g(x)+۱=(۵-x^{۲})(g(x)-۳)$$

$$g(x)=\frac{۳x^{۲}-۱۶}{x^{۲}-۳}$$

۴۵) حدود m را طوری بیابید که دامنه توابع زیر برابر با مجموعه اعداد حقیقی شود.

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x^{۲}+mx+۱}$ ب) $g(x)=\sqrt{x^{۲}+m^{۲}-۱}$

حل الف) $\Delta<۰ \Rightarrow \Delta=m^{۲}-۴<۰ \Rightarrow m\in(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$

حل ب)

$$x^{۲}+m^{۲}-۱\geq ۰ \Rightarrow \Delta\leq ۰ \Rightarrow \Delta=-۴(m^{۲}-۱)\leq ۰ \Rightarrow m^{۲}-۱\geq ۰ \Rightarrow m\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$$

۴۶) اگر $g(x)=x^{۳}-۱$ و $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\leq ۱ \\ ۴ & ۱<x<۲ \\ \sqrt[۳]{x} & x\geq ۲\end{cases}$ باشد، عبارت fog را محاسبه کنید.

حل :

$$x^{۳}-۱\leq ۱ \Rightarrow x^{۳}\leq ۲ \Rightarrow x\leq\sqrt[۳]{۲} \Rightarrow f(g(x))=۲x^{۳}-۲$$

$$۱<x^{۳}-۱<۲ \Rightarrow ۲<x^{۳}<۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲}<x<\sqrt[۳]{۳} \Rightarrow f(g(x))=۴$$

$$x^{۳}-۱\geq ۲ \Rightarrow x^{۳}\geq ۳ \Rightarrow x\geq\sqrt[۳]{۳} \Rightarrow f(g(x))=\sqrt[۳]{x^{۳}-۱}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases} ۲x^{۳}-۲ & x\leq\sqrt[۳]{۲} \\ ۴ & \sqrt[۳]{۲}<x<\sqrt[۳]{۳} \\ \sqrt[۳]{x^{۳}-۱} & x\geq\sqrt[۳]{۳}\end{cases}$$

۴۷) اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ ، دامنه و ضابطه $gof(x)$ را به دست آورید .

حل :

$$Dgof=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[۳,+\infty) \mid \sqrt{x-۳}\in R-\{۱\}\}$$

$$D_{gof}=[۳,۴]\cup(۴,+\infty)\Rightarrow\sqrt{x-۳}\neq ۱\Rightarrow x-۳\neq ۱\Rightarrow x\neq ۴\Rightarrow$$

۴۸) $fog(x)=۲x$ و $f(x)=\dfrac{x}{x-۲}$ آنگاه $g(x)$ را تعیین کنید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x))=۲x \\ f(g(x))=\dfrac{g(x)}{g(x)-۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{g(x)}{g(x)-۲}=۲x\Rightarrow g(x)=۲xg(x)-۴x$$

$$\Rightarrow g(x)(1-2x)=-4 \Rightarrow g(x)=\frac{-4x}{1-2x}$$

۴۹) اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ، دامنه و ضابطه $gof(x)$ را به دست آورید.

حل :

$$Dgof=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[3,+\infty) \mid \sqrt{x-3}\in R-\{1\}\}$$

$$D_{gof}=[3,4]\cup(4,+\infty)\Rightarrow \sqrt{x-3}\neq 1 \Rightarrow x-3\neq 1 \Rightarrow x\neq 4 \Rightarrow$$

۵۰) $fog(x)=2x$ و $f(x)=\frac{x}{x-2}$ آنگاه $g(x)$ را تعیین کنید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x))=2x \\ f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-2}=2x \Rightarrow g(x)=2xg(x)-4x$$

$$\Rightarrow g(x)(1-2x)=-4 \Rightarrow g(x)=\frac{-4x}{1-2x}$$

۵۱) اگر $f(x)=\frac{x}{2-x}$ و $gof(x)=\frac{x}{2}$ ضابطه $g(x)$ را بیابید .

حل :

$$g(f(x))=\frac{x}{2}\Rightarrow g\left(\frac{x}{2-x}\right)=\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2-x}=t \Rightarrow x=2t-2tx \Rightarrow x+2tx=2t$$

$$g(x)=\frac{2x}{1+2x} \Rightarrow x(1+2t)=2t \Rightarrow x=\frac{2t}{1+2t} \Rightarrow g(t)=\frac{2t}{1+2t} \rightarrow$$

۵۲) $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\frac{x}{x-2}$ مطلوب است محاسبه ضابطه و دامنه fog .

حل :

$$D_{fog}=\{x\varepsilon D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in R-\{۲\} \mid \frac{x}{x-۲}\in[۱,+\infty)\right\}$$

$$\frac{x}{x-۲}\geq ۱\Rightarrow \frac{x}{x-۲}-۱\geq ۰\Rightarrow \frac{x-x+۲}{x-۲}\geq ۰\Rightarrow \frac{۲}{x-۲}\geq ۰\to x-۲>۰\to x>۲\to D_{fog}=(۲,+\infty)$$

$$fog(x)=f(\frac{x}{x-۲})=\sqrt{\frac{x}{x-۲}-۱}$$

۵۳) زوج و یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید:

الف) $f(x)=\left[\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right]$

حل :

$$f(-x)=\left[\frac{(-x)^۲}{(-x)^۲+۱}\right]=\left[\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right]=f(x) \qquad x^۲+۱\neq ۰\to D=R$$ تابع زوج است

ب) $g(x)=x[x]$

حل :

$g(-x)=(-x)[-x]=x[x]=g(x)$ و $D=R$ تابع زوج است

ج) $h(x)=\log_۲\frac{x-۴}{x+۴}$

حل :

$$h(-x)=\log_۲\frac{-x-۴}{-x+۴}=\log_۲\frac{-(x+۴)}{-(x-۴)}=\log_۲(\frac{x-۴}{x+۴})^{-۱}=-h(x)$$

$\frac{x-۴}{x+۴}>۰\to D_h=(-\infty,-۴)\cup(۴,+\infty)\to$. تابع فرد است

۵۴) توابع $f(x)=\frac{۲}{x-۳}$ و $g(x)=\sqrt{x-۴}$ مفروضند.

الف) ضابطه gof را در صورت وجود به دست آورید.

ب) دامنه تابع gof, g, f را تعیین کنید.

حل الف)

$$gof(x) = g(\frac{۲}{x-۳}) = \sqrt{\frac{۲}{x-۳} - ۴}$$

حل ب)

$$D_f = |R - \{۳\} \qquad D_g = [۴, +\infty]$$

$$D_{gof} = \left\{x\varepsilon \mid R - \{۳\} \mid \frac{۲}{X-۳} \varepsilon [۴, +\infty]\right\}$$

$$D_{gof} = (-\infty, \frac{۵}{۴}) \; \frac{۲}{x-۳} \geq ۴ \Rightarrow ۴x - ۳ \leq ۲ \Rightarrow ۴x \leq ۵ \Rightarrow x \leq \frac{۵}{۴} \rightarrow$$

۵۵) اگر $f(x) = \frac{۲}{x}$ و $g(x) = \frac{۱}{۱-x^۲}$ باشد دامنه تابع $\frac{f}{g}$ و fog را به دست آورید.

حل :

$$D_f = R - \{۰\} \qquad D_g = R - \{-۱, ۱\}$$

$$D_{F/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = R - \{-۱, ۰, ۱\}$$

xی وجود ندارد. $g(x) = ۰$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in R - \{-۱, ۱\} \mid \frac{۱}{۱-x^۲} \in R - \{۰\}\right\}$$

$$\frac{۱}{۱-x^۲} \neq ۰ \Rightarrow x \in R \qquad D_{fog} = R - \{-۱, ۱\}$$

۵۶) بیشترین مقدار $f(x) = (k+۳)x^۲ - ۴x + ۷$ برابر صفر است. مقدار k را بیابید.

حل :

$$x_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۲(k+۳)}$$

$$f(x_s) = ۰ \Rightarrow (k+۳)(\frac{۴}{۲(k+۳)})^۲ - ۴(\frac{۴}{۲(k+۳)}) + ۷ = ۰ \Rightarrow ۷k + ۲۱ = ۴ \Rightarrow k = \frac{-۱۷}{۷}$$

۵۷) اگر $f(x) = \frac{۱}{a^۲x^۲+۱}$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{a-x}}$ به طوری که دامنه gof برابر $\Re$ باشد، حدود تغییرات a را بیابید .

حل :

$$D_f = \Re \quad , \quad D_g = (-\infty, a)$$

$$D_{gof} = \left\{x \in \Re \mid \frac{۱}{a^۲x^۲+۱} \in (-\infty, a)\right\} \Rightarrow \frac{۱}{a^۲x^۲+۱} < a \Rightarrow \frac{۱-a^۳x^۲-a}{a^۲x^۲+۱} < ۰$$

$$a^۲x^۲+۱>۰ \Rightarrow a^۳x^۲+a-۱>۰ \Rightarrow \begin{cases} a>۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$$

$$\Delta = -۴a^۳(a-۱) < ۰ \quad , \quad a>۰$$

$$a \in ((-\infty, ۰) \cup (۱, +\infty)) \cap (۰, +\infty) \Rightarrow a \in (۱, +\infty)$$

۵۸) اگر $h(\frac{x^۲+۱}{x}) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴$, $g(x) = ۲x+۵$ مطلوب است.

الف: ضابطه $(fog)(x)$ ب: دامنه $(fog)(x)$

حل الف)

$$h(x) = x^۲ - ۵ \quad h(\frac{x^۲+۱}{x} = \frac{۱}{x} + x) =$$

$$h(\frac{۱}{x}+x) = (\frac{۱}{x}+x)^۲ - ۵ = \frac{۱}{x^۲} + x^۲ + ۱ - ۵ = \frac{۱}{x^۲} + x^۲ - ۴$$

$$(hog)(x) = h(g(x)) = h(۲x+۵) = (۲x+۵)^۲ - ۵ = ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۵ - ۵$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۰$$

حل ب : $D_{fog(x)} = \{x \mid x \in Dg \, , \, q(x) \in Df\} = \{x \mid x \in R \, , \, ۲x+۵ \in R\} = R$

۵۹) در مورد زوج و یا فرد بودن توابع زیر تحقیق کنید.

الف: $h(x)=\sin(\log\frac{۲-x}{۲+x})$ ب: $h(x)=۲x^۲-\sqrt{|x|-\cos^۳(x)}$

حل الف : $\frac{۲-x}{۲+x}>۰\Rightarrow$ تعیین علامت $\Rightarrow D_f=(-۲,۲)$ دامنه متقارن می باشد

$$h(-x)=\sin(\log\frac{۲-(-x)}{۲+(-x)})=\sin(\log\frac{۲+x}{۲-x})$$

$-\log x=ly\frac{۱}{x}$ چون $\Rightarrow h(-x)=\sin(-\log\frac{۲-x}{۲+x})$

$h(-x)=-\sin(\log\frac{۲-x}{۲+x})$ بنابراین h فرد است.

حل ب: $D_h=R$ دامنه متقارن است

$h(-x)=۲(-x)^۲-\sqrt{|-x|-\cos^۳(-x)}=۲x^۲-\sqrt{|x|g^۳x}=h(x)\Rightarrow$ f زوج است

۶۰) زوج یا فرد بودن $f(x)=|۳x+۵|+|۳x-۵|$ را تعیین کنید.

حل :

$D_f IR$ دامنه متقارن است.

$$f(-x)=|۳(-x)+۵|+|۳(-x)-۵|=|-۳x+۵|+|-۳x-۵|=|-(۳x-۵)|+|-(۳x+۵)|=$$
$$|۳x-۵|+|۳x+۵|=f(x)$$

تابع زوج است.

۶۱) در تابع با ضابطه $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ را بیابید.

حل :

$f(x)=۴$ $\quad$ $۴=-x+\sqrt{-۲x}$

$۴+x_{\geq ۰}=\sqrt{-۲x_{\geq ۰}}$ $\quad$ $D=[-۴,۰]$

$(۴+x)^۲=(\sqrt{-۲x})^۲$

$x^۲+۸x+۱۶=-۲x$

$x^۲+۱۰x+۱۶=۰\left\langle \begin{array}{l} x=-۸ \text{ غ ق ق} \\ x=-۲ \text{ ق ق} \end{array}\right.$ $\quad$ $f^{-۱}(۴)=-۲$

۶۲) اگر $g(x)=۲x+۴$, $fog(x)=\frac{\sqrt{x}}{۳x-۱}$ باشد $f(x)$ را بدست آورید .

حل :

$$fog(x)=f(g(x))\longrightarrow\frac{\sqrt{x}}{۳x-۱}=f(۲x+۴)$$

با قرار دادن $۲x+۴=t$ داریم :

$$f(t)=\frac{\sqrt{۲(t-۴)}}{۳t-۱۴}\quad\longrightarrow\quad f(x)=\frac{\sqrt{۲(x-۴)}}{۳x-۱۴}$$

۶۳) اگر $f(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۰\\ ۲x & x\le ۰\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x & x\ge ۱\\ x+۲ & x<۱\end{cases}$ باشند ضابطه fog را بیابید .

حل :

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}g(x)-۱ & g(x)>۰\\ ۲g(x) & g(x)\le ۰\end{cases}$$

و در حالت $g(x)>۰$ داریم : $g(x)=\begin{cases}x & x\ge ۱\\ x+۲ & -۲<x<۱\end{cases}$

و در حالت $g(x)\le ۰$ داریم : $g(x)=\{x+۲ \quad x\le -۲$ بنابرین نتیجه می گیریم که

$$fog(x)=\begin{cases}x-۱ & x\ge ۱\\ x+۱ & -۲<x<۱\\ ۲(x+۲) & x\le -۲\end{cases}$$

۶۴) فرض کنید $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ ، ضابطه و دامنه gof را تعیین کنید .

حل : ابتدا $f(x)$ را تشکیل می دهیم. از تغیرمتغیر استفاده می کنیم. یعنی:

$$\frac{x}{x-1}=t\to x=xt-t\to x-xt=-t\to x(1-t)=-t$$

$$x=\frac{t}{t-1}\to f(t)=\frac{t-1}{t}\to f(x)=\frac{x-1}{x}$$

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{1-(f(x))^2}=\sqrt{1-(\frac{x-1}{x})^2}=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$$

$$Df=R-\{0\}\ ,\quad Dg=1-x^2\ge 0\ ,Dg=[-1,1]$$

$$Dgof = \{x \in Df \mid f(x) \in Dg\} = \left\{x \in R - \{0\} \middle| \frac{x-1}{x} \in [-1,1]\right\}$$

$$-1 \leq \frac{x-1}{x} \leq 1$$

$$D1(1): -1 \leq \frac{x-1}{x} \rightarrow \frac{x-1}{x} + 1 \geq 0 \rightarrow \frac{x-1+x}{x} \geq 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x} \geq 0$$

$$2x+1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 0$$

$$D1 = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

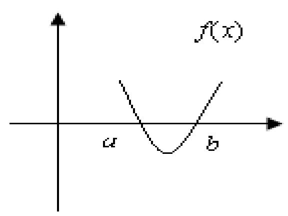
x	$x<0$	0	$\frac{1}{2}$
$۲x-۱$	-	-	+
x	-	+	+
$\frac{2x+1}{x}$	+	ن -	+

$$D2(2): \frac{x-1}{x} \leq 1 \rightarrow \frac{x-1}{x} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{x-1-x}{x} \leq 0 \rightarrow \frac{-1}{x} \leq 0 \rightarrow \frac{1}{x} \geq 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow D2 = (0, +\infty)$$

$$D': D1 \cap D2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$Dgof = D' \cap \ddot{D} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

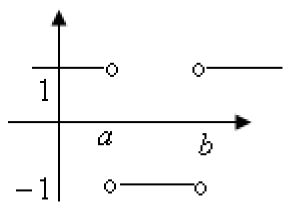
۶۵) با توجه به نمودار $f(x)$



الف) نمودار $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ را رسم کنید.

ب) حدود a چقدر باشد تا معادله $x = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ جواب نداشته با شد

حل : $a < 1$



نمودار $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$

۶۶) اگر $f = \{(۳,۴), (۸,۹), (۵,۲)\}$ و $g = \{(۱,۳), (-۲,۷), (۵,۹), (۱۱,۰)\}$ باشدآنگاه fog و $\frac{۳f + ۴}{g}$ را بیابید.

حل :

$$fog=\{(۱,۴)\} \quad , \quad \frac{۳f+۴}{g}=\frac{۳f(۵)+۴}{g(۵)}=\frac{۱۰}{۹}$$

۶۷) اگر f معکوس پذیر باشد با فرض معکوس پذیری g معکوس تابع $g(x)=\frac{۵-f(۳-۴x)}{f(۳-۴x)}$ را بیابید.

حل :

$$g^{-۱}(y)=x \quad , \quad y=\frac{۵-f(۳-۴x)}{f(۳-۴x)} \Rightarrow f(۳-۴x)=\frac{۵}{y+۱} \Rightarrow f^{-۱}(\frac{۵}{y+۱})=۳-۴x \Rightarrow$$

$$x=\frac{۱}{۴}(۳-f^{-۱}(\frac{۵}{y+۱}))$$

$$g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}(۳-f^{-۱}(\frac{۵}{x+۱}))$$

۶۸) توابع g, f با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ مفروضند .

الف) بدون تشکیل ضابطه ، D_{fog} را تعیین کنید .

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید .

حل الف)

$$D_f=[۱,+\infty) \, , \, D_g=R-\{۰\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R-\{۰\} \mid \frac{۱}{x}\geq ۱\}=(۰,۱]$$

حل ب)

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{\frac{۱}{x}-۱}$$

۶۹) معکوس تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۳x-۲}$ و دامنه‌ی تابع معکوس را مشخص کنید.

حل :

$$y=\sqrt{۳x-۲}\Rightarrow y^۲=۳x-۲\Rightarrow x=\frac{y^۲+۲}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۲}{۳}$$

با توجه به اینکه $D_{f^{-۱}}=R_f$ و $R_f=[۰,+\infty)$ پس $D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$ می‌باشد.

۷۰) k را طوری تعیین کنید که دوتابع g, f مساوی باشند .

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-x}{x} & x\neq ۰\\ k+۱ & x=۰\end{cases} \qquad\qquad g(x)=x-۱$$

حل :

$$x\neq ۰ \to f(x)=x-۱ \to f(۰)=g(۰)\to k+۱=-۱\to k=-۲$$

۷۱) اگر $f=\{(۲,-۱),(۳,۰),(۴,۱),(۵,۲)\}$, $g=\{(-۱,۱),(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$ باشد توابع زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید .

الف) gof ب) $\frac{۲f}{g-۱}$

حل :

x	2	3	4	5
$f(x)$	-1	0	1	2
$gof(x)$	1	------	3	1

$gof=\{(۲,۱),(۴,۳),(۵,۱)\}$

x	2	3
$۲f(x)$	--2	0
$g(x)-۱$	0	1
$\frac{۲f}{g-۱}$	ت ن	0

$\frac{۲f}{g-۱}=\{(۳,۰)\}$

۷۲) توابع f, g با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-۲}$, $g(x)=x^۲+x$ مفروضند . دامنه تابع fog رابدون تعیین ضابطه آن بدست آورید .

حل :

$$D_f=[۲,+\infty), D_g=R$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, x^۲+x\in d_f\}=\{x|x\in R, x^۲+x\geq ۲\}=(-\infty,-۲\cup(۱,+\infty)$$

۷۳) هزینه ی مکالمه تلفنی بین دو شهر ۲۰ تومان برای کمتر از ۳ دقیقه و ۵ تومان برای هر دقیقه ی اضافی است .

(کسر دقیقه یک دقیقه به حساب می آید) تابع هزینه ی مکالمه ی تلفنی بین این دو شهر را بر حسب زمان (tدقیقه)

بنویسید . (به صورت جزءِ صحیح)

حل : ابتدا تابع هزینه ی مکالمه تلفنی را بر حسب زمان به صورت چند ضابطه ای می نویسیم :

$$P(t)=\begin{cases} ۲۰ & ۰<t<۳ \\ ۲۰+(۱\times ۵) & ۳\le t<۴ \\ ۲۰+(۲\times ۵) & ۴\le t<۵ \\ ۲۰+(۳\times ۵) & ۵\le t<۶ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

پس داخل براکت باید به صورت $t-۲$ باشد . بنابراین برای $t\ge ۳$ داریم :

$$t\ge ۳\to f(t)=۲۰+۵[t-۲]=۵[t]+۱۰=۵([t]+۲)=۵[t+۲]$$

$$f(t)=\begin{cases} ۲۰ & ۰<t<۳ \\ ۵[t+۲] & t\ge ۳ \end{cases}$$

۷۴) اگر تابع $f=\{(۰,a-۱),(-۱,۲-d),(a+۲b-۲,c)\}$ هم زوج و هم فرد باشد حاصل d,c,b,a چقدر است ؟

حل :

چون تابع هم زوج وهم فرد است پس اولا دامنه تابع باید متقارن باشد وثانیا تابع باید تابع ثابت صفر باشد

$$D_f=\{۰,-۱,a+۲b-۲\}\to a+۲b-۲=۱\to a+۲b=۳$$

$$a-۱=۰\to a=۱\to b=۱$$

$$c=۰\quad ,\quad ۲-d=۰\to d=۲$$

۷۵) اگر $g(x)=\sqrt{x}, f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ دامنه $(f+g)of$ را بدست آورید.

حل :

$$D_f:۱-x^۲\ge \to x^۲\le ۱\ x\in[-۱,۱]$$

$$D_g:[۰,+\infty)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[۰,۱]$$

$$D(f+g)of=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_{f+g}\}$$

$$=\{x\in[-۱,۱]\,|\,\sqrt{۱-x^۲}\in[۰,۱]\}$$

$$x\to ۰\le\sqrt{۱-x^۲}\le ۱\to ۰\le ۱-x^۲\le ۱$$

$$-۱\le -x^۲\le ۰\xrightarrow{\times(-۱)}۱\ge x^۲\ge ۰\to x^۲\le ۱\to -۱\le x\le ۱$$

۷۶) تابع $y = x^{۲} - ۲x + ۳$ در چه بازه ای یک به یک است. در آن بازه وارون آن را به دست آورید و نشان دهید.

$$f^{-۱}(f(x)) = x$$

حل :

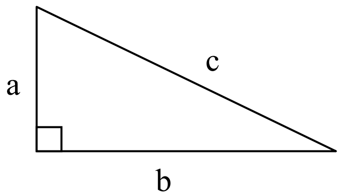
$$y = x^{۲} - ۲x + ۳ = (x-۱)^{۲} + ۲$$

پس برای $x \geq ۱$ تابع یک به یک است.

$$y = (x-۱)^{۲} + ۲ \to y - ۲ = (x-۱)^{۲} \to \sqrt{y-۲}^{\,x\geq ۱} = x - ۱ \to x = ۱ + \sqrt{y-۲}$$
$$f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{x-۲}$$
$$f^{-۱}(f(x) = ۱ + \sqrt{(x-۱)^{۲} + ۲ - ۲} = ۱ + x - ۱ = x$$

۷۷) مساحت مثلث قائم الزاویه ای $۲۰cm^{۲}$ است. طول وتر این مثلث را بعنوان تابعی از محیط آن بدست آورید.

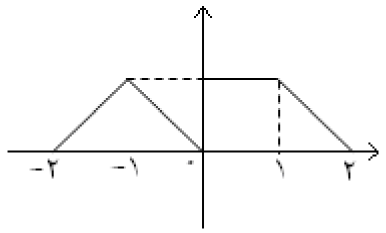
حل :



$$p = a + b + c$$
$$\begin{cases} S = ۲۰ = \frac{۱}{۲}ab \Rightarrow ab = ۴۰ \\ c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} \Rightarrow (a+b)^{۲} = c^{۲} + ۲ab \end{cases} \Rightarrow (a+b)^{۲} = c^{۲} + ۸۰ \Rightarrow a + b = \sqrt{c^{۲} + ۸۰}$$
$$c = p - (a+b) \Rightarrow c = p - \sqrt{c^{۲} + ۸۰} \Rightarrow p - c = \sqrt{c^{۲} + ۸۰} \Rightarrow$$
$$(p-c)^{۲} = c^{۲} + ۸۰ \Rightarrow p^{۲} + c^{۲} - ۲pc = c^{۲} + ۸۰ \Rightarrow c = \frac{p^{۲} - ۸۰}{۲p}$$

۷۸) اگر نمودار تابع f بصورت مقابل باشد نمودار تابع $y = f(۲x+۲)$ را رسم کنید.

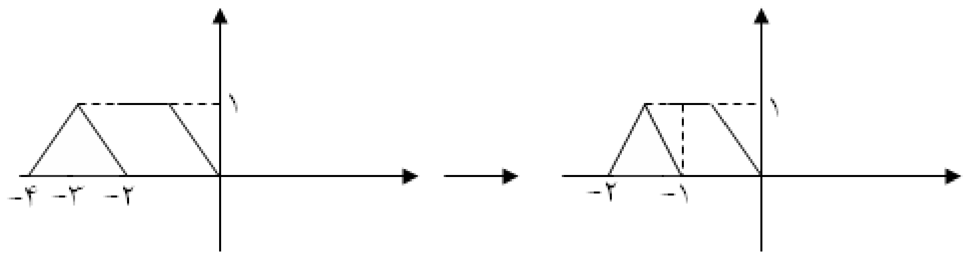
حل :



ابتدا نمودار تابع $g(x)=f(x+۲)$ را رسم نموده یعنی نمودار f را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می دهیم

وسپس نمودار $g(۲x)=f(۲x+۲)$ را رسم می کنیم یعنی نمودار $g(x)$ را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور

xها منقبض می کنیم.



۷۹) دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-۲}$ را تعیین کنید.

حل :

$$D_۱ : x \geq ۰$$
$$D_۲ : \sqrt{x}-۲ \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x} \geq ۲ \Rightarrow x \geq ۴$$
$$D = D_۱ \bigcap D_۲ = [۴,+\infty)$$

۸۰) اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲$ و $x>۰$ آن‌گاه ضابطه $(fog)^{-۱}$ را محاسبه کنید.

حل :

$$(fog)(x)=۱+\sqrt{x^۲}$$
$$y=۱+|x|$$
$$x=۱+|y| \quad \xrightarrow[x \geq ۰]{y>۰} \quad x-۱=y$$
$$\Rightarrow (fog)^{-۱}(x)=x-۱$$

۸۱) اگر $D_f=[۲,۵]\,,\ R_f=[-۱,۵]\,,\ g(x)=f(۳x-۱)+۲$ باشد اولاً دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. ثانیاً توضیح دهید که از روی نمودار f چگونه نمودار g را رسم می کنیم .

اولاً : $۲\le ۳x-۱\le ۵ \to D_g=[۱,۲]$

$$-۱\le f(۳x-۱)\le ۵ \to ۱\le g(x)\le ۷ \to R_g=[۱,۷]$$

ثانیاً : $g(x)=f(۳x-۱)+۲=f(۳(x-\frac{۱}{۳}))+۲$

ابتدا نمودار تابع f را به اندازه $\frac{۱}{۳}$ به سمت راست می بریم . نمودار تابع $f(x-\frac{۱}{۳})$ رسم می شود سپس طول نقاط روی این تابع را به ۳ تقسیم می کنیم تا نمودار تابع $f(۳(x-\frac{۱}{۳}))$ رسم شود برای رسم نمودار تابع g این نمودار را ۲ واحد موازی محور عرضها به سمت بالا می بریم .

۸۲) نشان دهید رابطه ی $y^۲-۲y+x^۲+۲x-۷=۰$ با شرط $y\le ۱$ معادله یک تابع است.

حل :

$$(y-۱)^۲+(x+۱)^۲=۹\ ,\ y\le ۱ \to y=۱-\sqrt{۹-(x+۱)^۲}$$ تابع است

۸۳) با فرض $f(x)=۲x+۵$ و $g(x)=x-\frac{۱}{۲}$ ضابطه $g^{-۱}of^{-۱}$ را بنوسید ؟

حل :

$$f(x)=۲x+۵ \to x=\frac{f(x)-۵}{۲} \to f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

$$g(x)=x-\frac{۱}{۲} \to x=g(x)+\frac{۱}{۲} \to g^{-۱}(x)=x+\frac{۱}{۲}$$

$$(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}\left(\frac{x-۵}{۲}\right)=\frac{x-۴}{۲}$$

۸۴) اگر $f=\{(-۳,۲),(۲,-۲),(۳,۳)\}$, $g=\{(۱,۰),(۲,-۱),(۳,۲)\}$ دو تابع باشند ، توابع زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید.

الف) $f-۳g$ ب) fog

الف) $f-۳g=\{(۲,۱),(۳,-۳)\}$ ب) $fog=\{(۳,-۲)\}$

۸۵) مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\log(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})$ زوج باشد .

حل :

چون f تابعی زوج است پس :

$$f(x)=f(-x)\Rightarrow \log(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})=\log(-x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})\Rightarrow$$
$$x+\sqrt{x^۲+۴a^۲}=-x+\sqrt{x^۲+۴a^۲}$$
$$\Rightarrow x=-x\Rightarrow ۲x=۰\Rightarrow x=۰$$

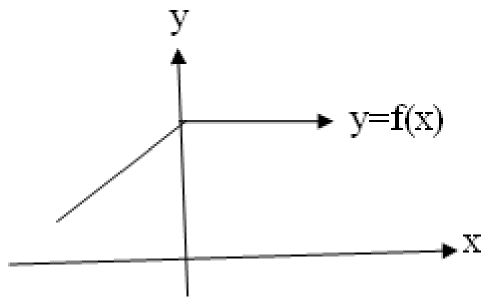
اگر x صفر باشد ، a نمی تواند صفر باشد زیرا لگاریتم صفر تعریف نشده است اما a اعداد مخالف صفر می تواند باشد زیرا تابع ثابت با دامنه متقارن زوج است.

۸۶) g تابعی است یک به یک و $g^{-۱}$ معکوس gاست معکوس تابع $f(x)=۱+۲g(x-۳)$ را حساب کنید ؟

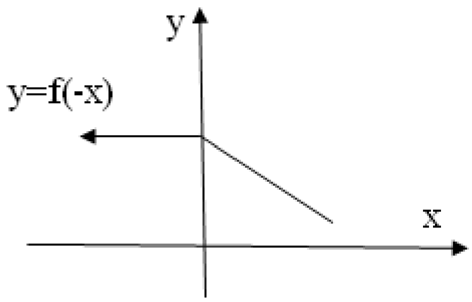
حل :

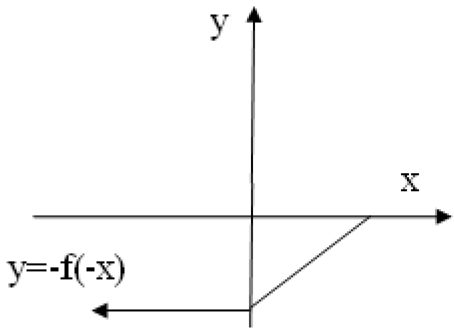
$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-۱}(y)$$
$$y=۱+۲g(x-۳)\Rightarrow g(x-۳)=\frac{y-۱}{۲}\Rightarrow$$
$$x-۳=g^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)\Rightarrow x=g^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)+۳,\Rightarrow$$
$$f^{-۱}(y)=g^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)+۳\xrightarrow{y\leftrightarrow x}f^{-۱}(x)=g^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)+۳$$

۸۷)نمودار تابع f به صورت زیر است . نمودار تابع به معادله $y=-f(-x)$ را رسم کنید.



حل :





۹۲)

۸۸) اگر g, f توابعی فرد باشند. نشان دهید fog نیز تابعی فرد است .

حل : ابتدا نشان می دهیم دامنه fog متقارن است. یعنی اگر $x \in D_{fog}$ آنگاه $-x \in D_{fog}$. با توجه به اینکه g, f فرد هستند داریم :

$$x \in D_{fog} \to x \in D_g,\ g(x) \in D_f \to -x \in D_g,\ -g(-x) \in D_f \to$$
$$-x \in D_g, g(-x) \in D_f \to -x \in D_{fog}$$

همچنین ثابت می کنیم $(fog)(-x) = -(fog)(x)$

$$fog(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = -f\big(g(x)\big) = -(fog)(x)$$

۸۹) اگر $F(x) + xF(۲) = x^۳ + ۱$ باشد حاصل $F(-۲)$ چقدر است ؟

حل :

$$x = ۲ \Rightarrow F(۲) + ۲F(۲) = ۲^۳ + ۱$$
$$۳F(۲) = ۹ \Rightarrow F(۲) = ۳$$
$$x = -۲ \to F(-۲) + (-۲)(۳) = (-۲)^۳ + ۱ \Rightarrow$$
$$F(-۲) = ۶ + (-۸) + ۱ = -۱ \Rightarrow F(-۲) = -۱$$

۹۰) آیا دو تابع $F^{-1}oF$ و FoF^{-1} همواره مساویند چرا؟

حل :

$$D_{FoF^{-1}}=\{X\in D_{F^{-1}}\mid F^{-1}(X)\in D_F\}$$
$$D_{F^{-1}oF}=\{X\in D_F\mid F(X)\in D_{F^{-1}}\}$$

لذا ممکن است $D_{FoF^{-1}}\neq D_{F^{-1}oF}$ بنابراین $FoF^{-1}\neq F^{-1}oF$

۹۱) اگر $f(x)=\frac{x^{2}-1}{x^{2}+1}$ آنگاه مشتق تابع معکوس $f\left(\sqrt{1-x}\right)$ در مبدا مختصات کدام است؟

حل:

$$f\left(\sqrt{1-x}\right)=\frac{1-x-1}{1-x+1}=\frac{-x}{2-x}\quad\Rightarrow\quad g(x)=f\left(\sqrt{1-x}\right)$$
$$g'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}f'\left(\sqrt{1-x}\right)$$
$$g(0)=f(1)=0\quad\Rightarrow\quad(0,0)\in g\quad\Rightarrow\quad(0,0)\in g^{-1}$$
$$\left(g^{-1}(0)\right)'=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{\frac{-1}{2}f'(1)}=-2$$

۹۲) f تابعی یک به یک و وارون پذیر است معکوس تابع $g(x)=1+2f(x-3)$ را حساب کنید.

حل:

$$y=1+2f(x-3)\Rightarrow\quad x=1+2f(y-3)\Rightarrow\quad 2f(y-3)=x-1$$
$$\Rightarrow\quad f(y-3)=\frac{x-1}{2}\quad\Rightarrow\quad y-3=f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
$$y=f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+3\quad\Rightarrow\quad g^{-1}(x)=f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+3$$

۹۳) **آیا دو تابع** $f(x)=\sqrt{1-\sin^{2}x}\;,\;g(x)=\cos x$ **مساویند؟چرا؟**

حل :

بررسی دامنه: $\begin{cases}D_f\;1-\sin^{2}x\geq 0\Rightarrow Sin^{2}x\leq 1\Rightarrow Df=IR\\ D_g=IR\end{cases}$

بررسی ضابطه: $\begin{cases}F(x)=\sqrt{1-Sin^{2}x}=\sqrt{Cos^{2}x}=|Cosx|\\ g(x)=Cosx\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} Df = Dg \\ f(x) \neq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f \neq g$$

۹۴) توابع g, f با ضابطه های $f(x) = \dfrac{۱}{\sqrt{۲x - x^۲}}$, $g(x) = \sqrt{x(x-۲)}$ را در نظر بگیرید:

الف)دامنه توابع g, f را محاسبه کنید. **ب)آیا تابع $f + g$ وجود دارد ؟ چرا ؟**

حل :

$$D_f : ۲x - x^۲ > ۰ \Rightarrow x(۲-x) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases} \to D_f = (۰,۲)$$

$$D_g = (-\infty,۰] \bigcup [۲,+\infty]\; D_g : x(x-۲) \geq ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۲ \to$$

$D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = \{\ \} \Rightarrow f + g$ **وجود ندارد.**

۹۵) اگر $f(x) = \dfrac{x-۱}{۲x+۱}$ و $gof(x) = x^۲$، ضابطه ی $g(x)$ را بیابید.

حل :

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-۱}{۲x+۱}\right) = x^۲$$

پس اگر فرض کنیم $\dfrac{x-۱}{۲x+۱} = u$، آن گاه $۲xu + u = x - ۱$ یا $x(۱-۲u) = u + ۱$ و در نتیجه $x = \dfrac{u+۱}{۱-۲u}$، بنا بر این $g(x) = \left(\dfrac{x+۱}{۱-۲x}\right)^۲$.

۹۶) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \dfrac{۲-x}{۱+x}$ تعریف شوند، دامنه و برد تابع gof را به دست آورید.

حل:

$$D_{gof} = \{x \in D_f ,\ f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \geq ۰ \ ,\ \sqrt{x} \neq -۱\} = [۰,+\infty)$$

برای تعیین برد، اگر ضابطه gof را تشکیل دهیم داریم :

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\frac{۲-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$

فرض کنید که $y=\frac{۲-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$ با طرفین وسطین و تعیین x بر حسب y داریم :

$$\sqrt{x}=\frac{۲-y}{y+۱}\geq ۰\Rightarrow -۱<y\leq ۲ \quad R_f=(-۱,۲]$$

۹۷) با توجه به مشخصات زیر ضابطه ی تابع f را بنویسید و سپس آن را رسم کنید.

الف) دامنه f اعداد حقیقی است.

ب) تابع در فاصله $(-\infty,-۲]$ تابعی همانی است.

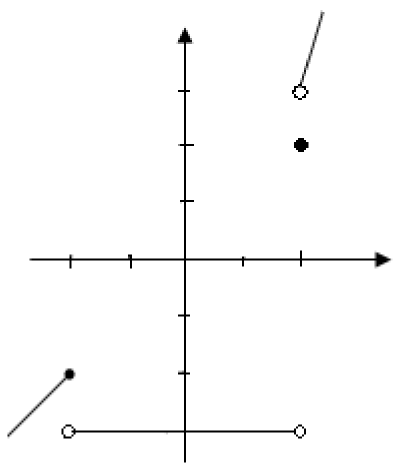
ج) $f(۲)=۱$

د) تابع f برای هر عدد بزرگتر از ۲، مربع آن عدد منهای یک را نسبت می دهد.

هـ) تابع f در فاصله $(-۲,۲)$ تابعی ثابت است که محور عرض ها را در ۳- قطع می کنند.

حل :

$$f(x)=\begin{cases} x & x\leq -۲ \\ -۳ & -۲<x<۲ \\ ۱ & x=۲ \\ x^۲-۱ & x>۲ \end{cases}$$



۹۸) معادله ی $\left\lfloor \frac{x}{۵}\right\rfloor=\frac{x}{۸}+۱$ را حل کنید.

حل : از معادله داریم $\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor - 1 = \frac{x}{8}$ و چون طرف راست معادله ی اخیر، عددی صحیح است، پس $\frac{x}{8}$ نیز عددی صحیح است و باید داشته باشیم $\frac{x}{8} = k \in Z$ یا $x = 8k$. از طرفی داریم

$$\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = \frac{x}{8} + 1 = k + 1 \quad \Rightarrow \quad k + 1 \le \frac{x}{5} < k + 2 \quad \Rightarrow$$

$$k + 1 \le \frac{8k}{5} < k + 2 \quad \Rightarrow \quad 5k + 5 \le 8k < 5k + 10 \Rightarrow$$

$$5 \le 3k < 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{3} \approx 1/66 \le k < \frac{10}{3} \approx 3/33$$

$$\xrightarrow{k \in Z} \quad k = 2, 3 \quad \xrightarrow{x = 8k} \quad x = 16, 24$$

۹۹) آیا اگر مجموع یا تفاضل دو تابع زوج باشند می توان نتیجه گرفت که هردو تابع نیز زوج هستند . چرا ؟

حل : خیر

مثال :

$$f = \{(1,-1),(-1,-1),(2,4),(3,5),(-2,4)\}, g = \{(1,3),(-1,-3),(2,5),(-2,5),(4,1)\}$$
$$f + g = \{(1,2),(-1,-4,(2,9),(-2,9)\}, f - g = \{(1,-4)(-1,2),(2,-1),(-2,-1)\}$$

همانطور که ملاحظه می شود $f - g, f + g$ هر دو زوج هستند اما نه f ونه g هیچ کدام زوج نیستند .

۱۰۰) n, m را چنان بیابید که تابع مقابل هم زوج باشد و هم فرد .

$$f(x) = \frac{(3m+6)x + m - n + 1}{1 + x^4}$$

حل :

$$D_f = R \qquad f(x) = 0$$

$$(3m+6)x + m - n + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} 3m + 6 = 0 \rightarrow m = -2 \\ m - n + 1 = 0 \rightarrow -2 - n + 1 = 0 \rightarrow n = -1 \end{cases}$$

f هم زوج و هم فرد است .

۱۰۱) نشان دهید ترکیب هر تابع همانی با یک تابع برابر خود تابع است .

حل : اگر $f(x) = x$ و $g(x)$ تابعی دلخواه باشد .

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g | g(x) \in R\} = D_g$$
$$fog(x) = f(g(x)) = g(x)$$
$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in R | f(x) \in D_g\} = D_g$$
$$gof(x) = g(f(x)) = g(x)$$

۱۰۲) دامنه تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{[x]}$ را بنویسید.

حل:

$$D_f=\{x|1-x^2\geq 0\,,[x]\neq 0\}$$

$$\left.\begin{array}{l}1-x^2\geq 0\rightarrow 1\geq x^2\rightarrow -1\leq x\leq 1\\ [x]=0\rightarrow 0\leq x<1\rightarrow [x]\neq 0\rightarrow x<0\ \vee\ x\geq 1\end{array}\right\}\rightarrow D_f=[-1,0)$$

۱۰۳) فرض کنید $f(x)=(2-x)^{2010}+ax+b$ ، مقادیر b,a را چنان بیابید که $f(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر و باقیمانده تقسیم آن بر $x-3$ مساوی ۶ باشد .

حل :

$$f(1)=0\rightarrow (2-1)^{2010}+a(1)+b=0\rightarrow a+b=-1$$

$$f(3)=6\rightarrow (2-3)^{2010}+a(3)+b=6\rightarrow 3a+b=5$$

$$\begin{cases}a+b=-1\\ 3a+b=5\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-4\end{cases}$$

۱۰۴) آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ و $g(x)=(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1})$ با هم برابر اند .

حل :

خیر زیرا $D_f\neq D_g$

$$D_f=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$$

$$D_g=[2,+\infty)$$

۱۰۵) a را چنان تعیین کنید که رابطه f در R یک تابع باشد .

$$f(x)=\begin{cases}5a+x+2 & x\geq 2\\ 2x^2+\cos(x-2) & x\leq 2\end{cases}$$

حل :

$$5a+2+2=2(2)^2+\cos(2-2)\rightarrow 5a+4=9\rightarrow a=1$$

۱۰۶) تابع معکوس تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-\sqrt{x}} & 0\leq x\leq 1\\ x^3-1 & x<0\\ x^2+3 & x>1\end{cases}$ را بیابید .

حل :

$۱)\ y=\sqrt{۱-\sqrt{x}}$

$۰\le x\le ۱\to ۰\le \sqrt{x}\le ۱\to -۱\le -\sqrt{x}\le ۰\to ۰\le ۱-\sqrt{x}\le ۱\to ۰\le \sqrt{۱-\sqrt{x}}\le ۱$

$y=\sqrt{۱-\sqrt{x}}\to y^۲=۱-\sqrt{x}\to \sqrt{x}=۱-y^۲\to x=(۱-y^۲)^۲\to f^{-۱}(x)=(۱-x^۲)^۲$

$۲)\ y=x^۳-۱$

$x<۰\to x^۳<۰\to x^۳-۱<-۱$

$y=x^۳-۱\to x^۳=y+۱\to x=\sqrt[۳]{y+۱}\to f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$

$۳)\ y=x^۲+۳$

$x>۱\to x^۲>۱\to x^۲+۳>۴\to y>۴$

$y=x^۲+۳\to x^۲=y-۳\to x=\sqrt{y-۳}\to f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۳}$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}(۱-x^۲)^۲ & ۰\le x\le ۱\\ \sqrt[۳]{x+۱} & x<-۱\\ \sqrt{x-۳} & x>۴\end{cases}$$

۱۰۷) اگر g تابعی فرد و $f(x)+۲f(-x)=۵g(x)$ باشد ثابت کنید f فرد است .

$g(-x)=-g(x)$

$f(x)+۲f(-x)=۵g(x)$

$f(-x)+۲f(x)=۵g(-x)=-۵g(x)$

$۳f(x)+۳f(-x)=۰\to f(-x)=-f(x)$

۱۰۸) f تابعی یک‌به‌یک است و $f^{-۱}$ معکوس f است. معکوس تابع $g(x)=۱+۲f(x-۳)$ را حساب کنید .

حل :

$y=g(x)\Rightarrow x=g^{-۱}(y)$

$y=۱+۲f(x-۳)\Rightarrow f(x-۳)=\frac{y-۱}{۲}\Rightarrow x-۳=f^{-۱}(\frac{y-۱}{۲})\Rightarrow x=f^{-۱}(\frac{y-۱}{۲})+۳$

$\Rightarrow g^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۳$

۱۰۹) اگر f وارون پذیر باشد،وارون تابع $h(x)=\frac{f(x)}{۱+f(x)}$ را بدست آورید ؟

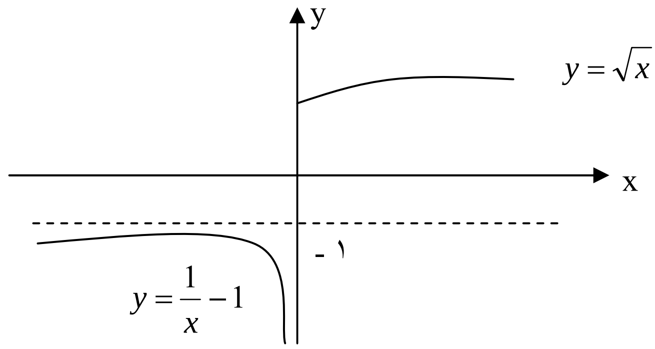
حل : فرض کنیم g وارون h باشد ، در این صورت داریم :

$$g(h(x)) = x \Rightarrow g(\frac{f(x)}{1+f(x)}) = x$$

$$\frac{f(x)}{1+f(x)} = t \Rightarrow tf(x)+t = f(x) \Rightarrow f(x)(t-1) = t \Rightarrow f(x) = \frac{t}{t-1} \Rightarrow t = f^{-1}(\frac{t}{t-1})$$

$$g(t) = f^{-1}(\frac{t}{1-t}) \Rightarrow g(x) = f^{-1}(\frac{x}{1-x})$$

۱۱۰) ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1 : x\geq 0\\ \frac{1}{x}-1 : x<0\end{cases}$ و اورن پذیر است ضابطه ی و اورن آن را بیابید:



حل :

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} f_1^{-1}(x) : x \in Df_1^{-1} = Rf_1 \\ f_2^{-1}(x) = x \in Df_2^{-1} = Rf_2 \end{cases}$$

مشاهده می شود که هیچ خط افقی منحنی را در پیش از یک نقطه قطع نمی کند لذا ازآنجا که هریک از ضابطه های تابع f دردامنه مربوط واورن پذیر ند پس ضابطه ی واورن

$$y-1\geq 0 \Rightarrow y\geq 1$$

$$f_1(x) = y = \sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x} = y-1 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = x \Rightarrow f_1^{-1}(x) = (x-1)^2 : x\geq 1$$

$$y+1<0 \Rightarrow y\leq -1$$

$$f_2(x) = y = \frac{1}{x}-1 \Rightarrow y+1 = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y+1} \Rightarrow f_2^{-1}(x) = \frac{1}{x+1} : x<-1$$

درنتیجه ضابطه ی تابع واورن بصورت زیر خواهد بود .

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}(x-1)^2 : x\geq 1\\ \frac{1}{x+1} : x<-1\end{cases}$$