

(۱) در معادله $3x^2 - 17x + k = 0$ مقدار k را طوری بدست آورید یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است.

حل: اگر α و β ریشه های معادله مورد نظر باشد داریم

$$\alpha = 3\beta + 3 \rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{17}{3} \rightarrow 3\beta + 3 + \beta = \frac{17}{3}$$

$$4\beta = \frac{8}{3} \rightarrow \beta = \frac{2}{3} \rightarrow 2\left(\frac{2}{3}\right) - 17 \times \frac{2}{3} + k = 0 \rightarrow k = 10$$

(۲) اگر $P(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x + \frac{5}{4}$ باشد نشان دهید $P\left(\frac{x^4}{2}\right)$ بر $\sqrt{2}x^2 + 1$ بخش پذیر است؟

حل:

$$P\left(\frac{x^4}{2}\right) = 8\left(\frac{x^4}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{x^4}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x^4}{2}\right) + \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{2}x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 8\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

(۳) مقدار k را طوری بدست آورید که معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} = k$ بی شمار ریشه داشته

باشد؟

حل:

$$\sqrt{x-1} = a \Rightarrow x = a^2 + 1 \Rightarrow a + \sqrt{a^2 + 1} - 2a = k \Rightarrow$$

$$a + \sqrt{(a-1)^2} = k \Rightarrow a + |a-1| = k$$

دو حالت وجود دارد یا $(a-1) \geq 0$ یا $a-1 < 0$ می باشد.

$$\begin{cases} a-1 \geq 0 \rightarrow a+a-1=k \rightarrow 2a=k+1 \rightarrow 2\sqrt{x-1}=k+1 \\ a-1 < 0 \rightarrow a-a+1=k \rightarrow k=1 \end{cases}$$

(۴) حاصل جمع زیر را بدست آورید.

$$S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{\text{تا } 100}$$

حل:

$$S = \frac{1}{9} (9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{\text{تا } 100}) =$$

$$\frac{1}{9} \times [(10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{100} - 1)]$$

$$= \frac{1}{9} \left[10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100} - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\text{تا } 100} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{10(10^{100} - 1)}{10 - 1} - 100 \right] = \frac{1}{9} \left[\frac{10}{9} (10^{100} - 1) - 100 \right]$$

$$= \frac{1}{81} (10^{101} - 10) - \frac{100}{9} = \frac{10^{101} - 10 - 900}{81} = \frac{10^{101} - 910}{81}$$

(۵) اگر n عددی طبیعی زوج باشد ثابت کنید $1 - x^n = (1+x)(1-x+x^2 - \dots - x^{n-1})$

اثبات: فرض می کنیم $S = 1 - x + x^2 - \dots - x^{n-1}$. طرفین این رابطه را در x ضرب می کنیم. داریم:

$$xS = x - x^2 + x^3 + \dots - x^{n-1} - x^n$$

عبارت $xS + S$ را تشکیل می دهیم:

$$xS + S = (x - x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} - x^n) + (1 - x + x^2 - \dots - x^{n-1}) \rightarrow$$

$$S(x+1) = 1 - x^n$$

به جای S مقدار آن را قرار می دهیم:

$$1 - x^n = (1+x)(1 - x + x^2 - \dots - x^{n-1})$$

۶) معادله $(x^4 + 2x^2)^2 - 5(x^4 + 2x^2) + 6 = 0$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = x^4 + 2x^2$ ، از این مطلب برای ساده کردن معادله استفاده می کنیم.

داریم: $y^2 - 5y + 6 = 0$. جوابهای این معادله عبارتند از $y = 3, y = 2$.

با توجه به $y = x^4 + 2x^2$ داریم:

$$x^4 + 2x^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = -3 \rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^2 = 2 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow$$

$$x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \rightarrow x^2 = -1 + \sqrt{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

۷) نامعادله قدرمطلق زیر را حل کنید.

$$||x - 3| + 1| > 2$$

حل:

$$||x - 3| + 1| > 2 \rightarrow \begin{cases} |x - 3| + 1 > 2 \rightarrow |x - 3| > 1 \rightarrow \begin{cases} x - 3 > 1 \rightarrow x > 4 \\ x - 3 < -1 \rightarrow x < 2 \end{cases} \\ |x - 3| + 1 < -2 \rightarrow |x - 3| < -3 \rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۸) از مبلغ A ریال پس انداز مرتبه ی اول $x_1 = \frac{A}{5}$ ، مرتبه ی دوم $x_2 = \frac{A}{15} + x_1$ ، مرتبه ی سوم $x_3 = \frac{A}{15} + x_2$ ، مرتبه ی سوم

$x_3 = \frac{A}{15} + x_2$ و ... برداشت می کنیم . با چنین برداشت پس از چند مرتبه موجودی به صفر می رسد؟

حل:

$$x_1 = \frac{A}{5} \text{ و } x_2 = \frac{A}{15} + \frac{A}{15} = \frac{2A}{15} \text{ و } x_3 = \frac{A}{15} + \frac{2A}{15} = \frac{3A}{15}$$

مشاهده می شود که برداشت ها از موجودی تشکیل یک دنباله ی حسابی می دهند که جمله ی اول آن

$x_1 = \frac{A}{15}$ و قدر نسبت آن $d = \frac{A}{15}$ می باشد . زمانی که جمع این برداشت ها مساوی کل موجودی (A)

شود . پس موجودی به صفر می رسد . در نتیجه :

$$S_n = A \rightarrow \frac{n}{2} \left(\frac{2A}{15} + (n-1) \frac{A}{15} \right) = A$$

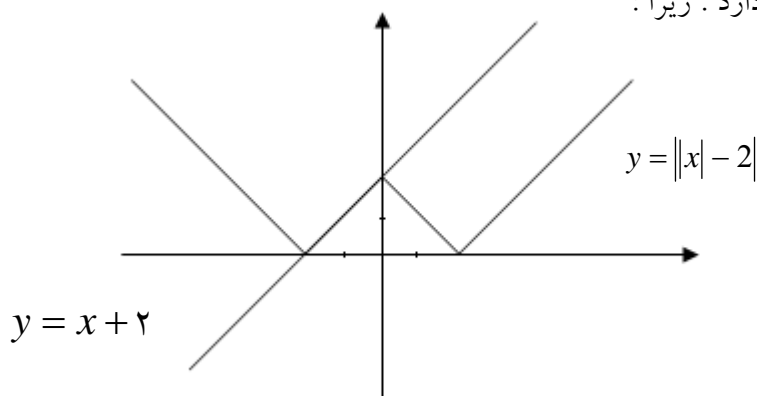
$$\rightarrow \frac{A}{15} (n + n^2) = 2A \rightarrow n^2 + n = 30 \rightarrow n^2 + n - 30 = 0 \rightarrow (n+6)(n-5) = 0$$

قق $n=5$ ، غقق $n=-6$

۹) به کمک رسم نمودار مشخص کنید معادله ی $|x|-2 = x+2$ چند جواب دارد؟

حل: بی شمار جواب دارد . زیرا :

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = ||x|-2| \end{cases}$$



۱۰) در یک کلاس نفر اول یک مهره ، نفر دوم ، دو مهره و نفر سوم سه مهره و به همین ترتیب نفر آخر کلاس (نفر n ام کلاس) n مهره دارد . اگر مهره ها را روی هم جمع کنیم و بین نفرات تقسیم کنیم ، به هر نفر ۱۳ مهره می رسد . تعداد نفرات کلاس کدام است؟

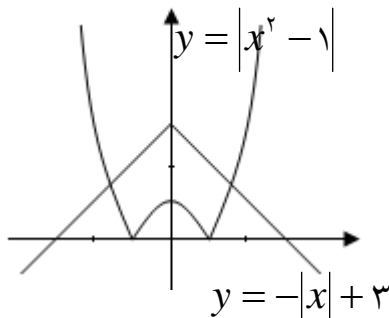
حل:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{میانگین} = 13 \rightarrow \frac{2}{n} = 13, n \neq 0 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 13 \Rightarrow n = 25$$

۱۱) به کمک رسم نمودار مشخص کنید معادله $|x^2 - 1| = -|x| + 3$ چند جواب دارد؟
حل: دو جواب دارد.

$$\begin{cases} y = -|x| + 3 \\ y = |x^2 - 1| \end{cases}$$



۱۲) اگر مجموع جملات شماره زوج یک دنباله عددی ۱۰ جمله ای ۳۰ و مجموع جملات شماره فرد آن ۲۰ باشد قدر نسبت را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 30 \\ a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + (a_8 - a_7) + (a_{10} - a_9) = 10 \Rightarrow 5d = 10 \Rightarrow d = 2$$

۱۳) معادله $|2x| + |x - 1| = 4$ را حل کنید

حل:

$$\begin{cases} 2x + x - 1 = 4 & x \geq 1 \\ 2x - (x - 1) = 4 & 0 < x < 1 \\ -2x - (x - 1) = 4 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3 \\ -3x + 1 = 4 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

(۱۴) اگر $x^2 + x < 0$ باشد آنگاه $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ را بیابید .

حل:

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ [x^2] = 0 \\ [x^3] = -1 \\ [x^4] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = 0 + (-1) + 0 + (-1) = -2$$

(۱۵) اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی و جمله دوم آن ۶ باشد و داشته باشیم $S_n = 2(1 + S_{n-1})$ ، جمله اول و مجموع ۲۰ جمله اول دنباله را به دست آورید .

حل:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + 6 \end{cases} \rightarrow a_1 + 6 = 2(1 + a_1) \rightarrow a_1 = 4 \rightarrow d = 2$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 4 + 19 \times 2) = 460$$

(۱۶) اگر باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x+3$ و $x-2$ به ترتیب ۷ و ۲ باشد باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را محاسبه کنید .

حل:

$$\begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow P(-3) = 7 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow P(2) = 2 \end{cases}$$

$$P(x) = (x^2 + x - 6)Q(x) + \underbrace{ax + b}_{R(x)} \rightarrow \begin{cases} P(-3) = (9 - 3 - 6)Q(-3) - 3a + b \\ P(2) = (4 + 2 - 6)Q(2) + 2a + b \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 7 = -3a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow R(x) = -x + 4$$

(۱۷) نا معادله لگاریتمی $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4) \geq -1$ را حل کنید.

حل:

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4) \geq \log_{\frac{1}{5}} 5 \rightarrow \log_5(x^2 - 4) \leq \log_5 5 \rightarrow$$

$$x^2 - 4 \leq 5 \rightarrow x^2 \leq 9 \rightarrow -3 \leq x \leq 3 \quad (1)$$

از طرفی:

$$x^2 - 4 > 0 \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow |x| > 2 \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم:

$$\begin{cases} -3 \leq x < -2 \\ 2 < x \leq 3 \end{cases} \rightarrow \text{م.ج: } [-3, -2) \cup (2, 3]$$

(۱۸) کارفرمایی با یک کارگر توافق کرد که اجرت روز اول ۶۴۰۰ تومان و تا پایان هفته اجرت هر روز نسبت به روز قبل پنجاه درصد افزایش یابد. مجموع اجرت ۶ روز اول این کارگر چند تومان است.

حل:

$$a_1 = 6400$$

$$a_2 = 6400 + \frac{1}{2}(6400) = \frac{3}{2}(6400)$$

$$a_3 = \frac{3}{2}(6400) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}(6400)\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2(6400)$$

بنابراین یک دنباله هندسی با جمله اول ۶۴۰۰ و قدرنسبت $\frac{3}{2}$ به دست می آید و مجموع اجرت کارگر به صورت

زیر محاسبه می شود.

$$S_{\frac{1}{2}} = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} \rightarrow S_{\frac{1}{2}} = \frac{640 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1} = 13300 \text{ تومان}$$

۱۹) در یک دنباله حسابی، به جمله ی اول ۴ واحد به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می کنیم. به مجموع ۱۰ جمله اول چقدر اضافه می شود.

حل:

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d \rightarrow S_{10} = 10a + 45d \quad (1)$$

$$S'_n = n(a+4) + \frac{n(n-1)}{2}(d+2) \rightarrow S'_{10} = 10a + 40 + 45d + 90 = 10a + 45d + 130 \quad (2)$$

$$(2) - (1) \rightarrow S'_{10} - S_{10} = 130$$

۲۰) جمله مستقل از x در بسط $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ برابر چند است؟

حل:

$$a_{k+1} = \binom{6}{k} (x^2)^k \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-k} = \binom{6}{k} x^{2k} \frac{(-1)^{6-k}}{x^{6-k}} = \binom{6}{k} x^{2k-6} (-1)^{6-k} \rightarrow$$

$$2k - 6 = 0 \rightarrow k = 3$$

$$a_3 = \binom{6}{3} (-1)^{6-3} = 120 = 120 \text{ بنابراین جمله مستقل از } x \text{ جمله سوم است و برابر است با: } 120$$

۲۱) در معادله درجه دوم $4x^2 - 16x + m = 0$ یکی از ریشه ها دو واحد بیشتر از ریشه ی دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه ی معادله را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases} \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{c}{a}} 3 = \frac{m}{4} \rightarrow m = 12$$

(۲۲) در چند جمله ای $P(x) = ax^3 - 2x + b$ مقدار a, b را چنان تعیین کنید که $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۲ باشد.
حل:

$$P(1) = a - 2 + b = 0 \Rightarrow a + b = 2$$

$$. b = 0, a = 2 \text{ در نتیجه } P(-1) = -a + 2 + b = 2 \Rightarrow -a + b = -2$$

(۲۳) اگر α, β ریشه های معادله $4x^2 + 5x - 2 = 0$ باشند معادله ای بنویسید که ریشه های آن α^2, β^2 باشند.
حل:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{4}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)$$

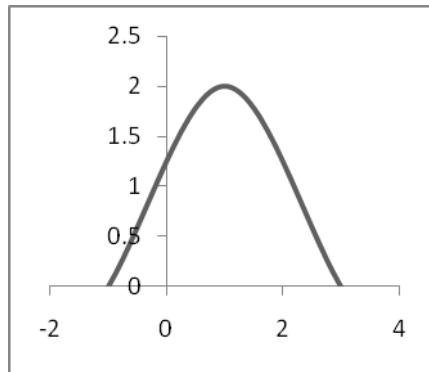
$$\Rightarrow S = \frac{41}{16}$$

$$P = \alpha^2\beta^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow X^2 - SX + P = 0 \Rightarrow X^2 - \frac{41}{16}X + \frac{1}{4} = 0$$

(۲۴) باتوجه به نمودار $y = ax^2 + bx + c$ و با ذکر دلیل تعداد ریشه ها و علامت ضرایب a, b, c را بنویسید.

حل:



چون راس سهمی در حالت \max می باشد پس $a < 0$

$$s = -\frac{b}{a} > \cdot \xrightarrow{a < 0} b > \cdot$$

اگر ریشه مثبت x_1 و ریشه منفی x_2 آنگاه $|x_2| < |x_1|$ و

$$p = \frac{c}{a} < \cdot \xrightarrow{a < 0} c > \cdot$$

(۲۵) نامعادله مقابل را به روش جبری حل کنید.

$$|x - 2| \leq 2x - 1$$

حل:

$$1) x < 2 \Rightarrow 2 - x \leq 2x - 1 \Rightarrow 3 \leq 3x \Rightarrow x \geq 1$$

$$2) x > 2 \Rightarrow x - 2 \leq 2x - 1 \Rightarrow x \geq -1$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

(۲۶) اگر عبارت $\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}$ برابر A باشد مقدار آن را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ می باشند. بنابراین:

$$\text{صورت حاصل} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{مخرج حاصل} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

در نتیجه $A = 2$.

نمونه سؤالات حسابان فصل اول طراحی شده توسط دبیران ریاضی شرکت کننده در دوره ضمن خدمت حسابان

۲۷) حوضی دو شیر دارد که شیر اول ۳۰ دقیقه زودتر از شیر دوم حوض را پر می کند. اگر دو شیر با هم باز شوند ۱۰ دقیقه زودتر از شیر اول به تنهایی حوض پر می شود شیر دوم به تنهایی در چند دقیقه حوض را پر می کند؟

حل: اگر شیر اول x دقیقه ای حوض را پر کند شیر دوم $x + 30$ دقیقه ای همین کار را انجام می دهد. اگر هر دو با هم کار کنند حوض بعد از $x - 10$ دقیقه پر می شود. داریم:

$$\frac{1}{x+30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x-10} \xrightarrow{\times x(x-10)(x+30)} x(x-10) + (x-10)(x+30) = x(x+30) \rightarrow$$

$$x^2 - 20x - 300 = 0 \rightarrow (x+110)(x-30) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -110 & \text{غ ق ق} \\ x = 30 & \end{cases}$$

لذا شیر اول ۳۰ دقیقه ای و شیر دوم ۶۰ دقیقه ای حوض را پر می کند.

۲۸) معادله $|x+2| = 4+3x$ را حل کنید.

حل:

$$|x+2| \geq 0 \rightarrow 4+3x \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{-4}{3}$$

$$x+2 = \pm(4+3x) \rightarrow \begin{cases} x+2 = 4+3x \rightarrow x = -1 & \text{ق ق} \\ x+2 = -4-3x \rightarrow x = \frac{-3}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۹) اگر باقیمانده تقسیم چندجمله ای $P(x) = 2x^3 - 3x + a^2 + 4$ بر $2x+4$ برابر ۳ شود، آنگاه a

را بیابید.

حل:

$$2x+4 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$P(-2) = -16 + 6 + a^2 + 4 = 3 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

۳۰) معادله قدر مطلق زیر را حل کنید.

$$|2x+1| - |x| = 4$$

حل:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -5 \\ 3x = 3 \\ x = 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x < -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0 \leq x \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ق ق } x = -5 \\ \text{غ ق ق } x = 1 \\ \text{ق ق } x = 3 \end{array} \right.$$

(۳۱) مقدار a و b را چنان بیابید که $P(x) = ax^2 + bx^2 + 1$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد.

حل:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\ \left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1) = a + b + 1 = 0 \\ P(-1) = a - b + 1 = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(۳۲) مجموع چند جمله از دنباله $(0, -4, 2, -12, 6, \dots)$ برابر با ۴۰۹۸ می شود؟

حل:

$$q = -2, \quad S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$4 = \frac{6(1-(-2)^n)}{1+2} \rightarrow 2049 = 1 - (-2)^n \rightarrow (-2)^n = -2048 \rightarrow (-2)^n = -2^{11} \rightarrow n = 11$$

(۳۳) اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم.

$$\alpha^2 \beta + 4 = 0$$

حل:

$$\alpha^2 \beta + 4 = 0 \rightarrow \alpha(\alpha\beta) + 4 = 0 \rightarrow \alpha P + 4 = 0 \xrightarrow{P=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}} 4\alpha + 4 = 0 \rightarrow \alpha = -1 \rightarrow$$

$$1 + 3m + 4 = 0 \rightarrow m = \frac{-5}{3}$$

(۳۴) کسر مقابل را بصورت یک چند جمله ای بنویسید.

$$p(x) = \frac{(x^7 + x + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)}{x^{10} + x^5 + 1}$$

حل:

$$p(x) = \frac{\frac{x^7 - 1}{x - 1} \times \frac{x^{15} - 1}{x^5 - 1}}{\frac{x^{15} - 1}{x^5 - 1}} = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

(۳۵) دو تصاعد حسابی با قدر نسبتهای ۹۰ و ۶۶ مفروض اند می دانیم جمله ی سوم هر دوی این تصاعدها عدد ۴۷ است . عدد بعدی ای که در هر دوی این تصاعدها وجود دارد چه عددی است ؟ این عدد یکسان جمله ی چندم هر تصاعد می شود ؟

حل:

$$[۹۰, ۶۶] = ۹۹۰$$

$$c_n = ۴۷ + (n - 1)۹۹۰ = ۹۰ \cdot n - ۹۴۳$$

$$c_p = ۹۹۰ \cdot (۲) - ۹۴۳ = ۱۹۸۰ - ۹۴۳ = ۱۰۳۷ \rightarrow$$

دومین عددی که در هر دو تصاعد مشترک است.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow ۱۰۳۷ = -۱۳۳ + (n - 1)۹۰ \Rightarrow n = ۱۴$$

$$a_p = a_1 + ۲d \Rightarrow ۴۷ = a_1 + ۱۸۰ \Rightarrow a_1 = -۱۳۳$$

$$b_p = b_1 + ۲d \Rightarrow ۴۷ = b_1 + ۱۳۲ \Rightarrow b_1 = ۴۷ - ۱۳۲ = -۸۵$$

$$b_n = b_1 + (n - 1)d \Rightarrow ۱۰۳۷ = -۸۵ + (n - 1)۶۶ \Rightarrow ۱۰۳۷ + ۸۵ + ۶۶ = ۶۶n$$

$$\Rightarrow ۱۱۸۸ = ۶۶n \Rightarrow n = ۱۸$$

(۳۶) علی می خواهد پول های خود را پس انداز کند . او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و

قرار می گذارد هر روز ۰/۹ پول روز قبل را در صندوق ، پول قرار دهد . پس از ۵۰ روز او چقدر پول

درصندوق خواهد داشت ؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد .

حل:

شماره روز n	۱	۲	۳	...	۵۰
مبلغ پس انداز روز nم	۱۰۰۰	۰/۹ × ۱۰۰۰	(۰/۹) ^۲ × ۱۰۰۰		(۰/۹) ^{۴۹} × ۱۰۰۰

$$S_{50} = 1000 + (0/9 \times 1000) + \dots + ((0/9)^{49} \times 1000)$$

$$= \frac{1000 \cdot (1 - (0/9)^{50})}{1 - 0/9} = 1000 \cdot (1 - (0/9)^{50}) < 10000$$

۳۷) مجموع جملات یک دنباله هندسی نامتناهی که جمله سوم آن ۳ و قدر نسبت آن $\frac{1}{4}$ باشد چقدر است؟

حل:

$$a_r = 3 \quad q = \frac{1}{4}$$

$$a_r = aq^r \Rightarrow a = \frac{a_r}{q^r} = \frac{3}{\frac{1}{16}} = 48 \Rightarrow S = \frac{a}{1-q} = \frac{48}{1-\frac{1}{4}} = 64$$

۳۸) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2$$

حل:

$$\text{دامنه} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D = [0, 4) \cup (4, +\infty) \\ 2-\sqrt{x} \neq 0 \rightarrow x \neq 4 \end{cases}$$

$$\frac{2-\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(2-\sqrt{x})} = 2 \Rightarrow \frac{4}{4-x} = 2 \Rightarrow 4 = 8-2x \Rightarrow x = 2$$

۳۹) در بسط دو جمله ای $(2x+1)^5$ ضریب x^4 را محاسبه کنید.

حل:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} (a)^{n-k} (b)^k$$

$$\rightarrow \binom{5}{k} (2x)^{5-k} (1)^k \Rightarrow x^{5-k} = x^4 \rightarrow 5-k = 4 \rightarrow k = 1$$

$$k=1 \rightarrow (1^5)(2x)^4(1)^1 = 8 \cdot x^4 \rightarrow \text{ضریب} = 8$$

(۴۰) مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی برابر $S_n = \frac{n^2}{3}$ است. جمله یازدهم این دنباله چند است.

حل:

$$S_{11} = S_{10} + a_{11} \Rightarrow a_{11} = S_{11} - S_{10}$$

$$a_{11} = \frac{(11)^2}{3} - \frac{(10)^2}{3} = \frac{121}{3} - \frac{100}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

(۴۱) معادله روبرو را حل کنید.

$$\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 1$$

حل:

$$D: x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 1 \xrightarrow{\times \sqrt{x+1}} \sqrt{(x+1)^2} - 2 = \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow x-1 = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\times 2} x^2 - 2x + 1 = x+1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

(۴۲) جمله ی وسط بسط $(x + \frac{1}{x})^8$ را محاسبه کنید.

حل:

جمله پنجم = جمله وسط $\rightarrow 9$ جمله داریم $\rightarrow x = 8$

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} (a)^{n-k} (b)^k \rightarrow t_5 = \binom{8}{4} (x)^4 = \frac{8!}{4!4!} x^4 \times \frac{1}{x^4} = 70$$

(۴۳) معادله درجه دومی که دارای ضرایب گویا و یکی از ریشه های آن $3 - \sqrt{2}$ باشد کدام است؟

حل:

$$x' = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow x'x'' = 9 - 2 = 7 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$x'' = 3 + \sqrt{2} \quad x' + x'' = 6$$

(۴۴) اگر باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x-8$ مساوی k باشد مانده تقسیم $P(x^2)$ بر $x-2$ چیست؟

حل:

$$P(x) = (x-8)Q(x) + k$$

$$P(x^2) = (x^2-8)Q(x^2) + k \xrightarrow{x=2} R = K$$

(۴۵) b, a را چنان بیابید که چند جمله ای $x^3 + ax^2 + 2bx - 3$ بر $x - 3$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر -4 باشد.

حل:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 27 + 9a + 6b - 3 = 0 \Rightarrow 3a + 2b = -8$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 + a + 2b - 3 = -4 \Rightarrow a + 2b = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -8 \\ a + 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -3, b = \frac{1}{2}$$

(۴۶) اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$ را

بدست آورید.

حل:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4$$

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{(4)^2 - 2(-2) + 4}{-2 + 4 + 1} = \frac{24}{3} = 8$$

(۴۷) a را چنان بیابید که رابطه زیر میان ریشه های معادله $x^2 - (a+2)x + a+1 = 0$ برقرار باشند.

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6}$$

حل:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = a+2 \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = a+1$$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{\beta + \alpha + 2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{a+2+2}{a+1+a+2+1} = \frac{5}{6}$$

$$\rightarrow 6a + 24 = 10a + 20 \rightarrow a = 1$$

۴۸) در صورتی که دو چند جمله ای $x^2 + 3x - 2$ و $x^3 - 4x^2 + 5x + p$ در تقسیم بر $x + 1$ هم باقی مانده باشند، مقدار p را بیابید.

حل:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \begin{cases} R_1 = (-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4 \\ R_2 = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) + p \rightarrow -4 = -1 + p \rightarrow p = 6 \end{cases}$$

۴۹) در ضرب دو عدد مثبت که یکی از دیگری هشت واحد کوچک تر است اشتباهی رخ داده است. به طوری که رقم صدگان یک واحد بزرگ تر شده است. برای آزمایش، عدد به دست آمده از ضرب را بر عدد بزرگتر تقسیم کرده ایم، خارج قسمت ۲۲ و باقیمانده ۱۹ شده است. دو عدد را به دست آورید.

حل:

$$x(x - 8) + 100 = 22x + 19 \rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 27 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

عدد بزرگتر ۲۷ و عدد کوچکتر ۱۹ می باشد.

۵۰) دو کارگر با هم کاری را در ۶ ساعت تمام می کنند. اگر قرار شود کارگر اول نصف کار و کارگر دوم بقیه ی کار را انجام دهد، شش ساعت و نیم زمان بیشتری صرف می شود. هر کارگر به تنهایی این کار را در چه زمانی انجام می دهد.

حل:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{12/5 - x} = \frac{1}{6}$$

$$2x^2 - 25x + 75 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 7/5 \\ x = 5 \end{cases}$$

هر کارگر به تنهایی کار را در ۱۵ روز و ۱۰ روز انجام می دهد.

(۵۱) نامعادله $|2x-1| \geq \sqrt{x+1}$ را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

حل:

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم (با فرض $x \geq -1$)

$$4x^2 - 4x + 1 \geq x + 1 \rightarrow 4x^2 - 5x \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq \frac{5}{4} \end{cases} \rightarrow S = [-1, 0] \cup \left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

(۵۲) در خیابان ملاصدرا شیراز سه چراغ راهنمایی نصب شده است. چراغ ۱ هر ۴۵ ثانیه یک بار چراغ دوم هر ۱ دقیقه ۱ بار و چراغ ۳ هر ۹۰ ثانیه یک بار قرمز می‌شوند. بعد از اولین باری که هر سه چراغ یک بار باهم قرمز هستند. حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا هر سه چراغ دوباره قرمز شوند.

حل:

$$\begin{cases} 45 = 3^2 \times 5 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \rightarrow [45, 60, 90] = 5 \times 3^2 \times 2^2 = 180 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

(۵۳) در دنباله هندسی ... و ۲۵ و ۵ و ۱ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم (با شروع از جمله اول) تا مجموع آنها بیشتر از ۵۰۰ شود؟

حل:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} > 500 \rightarrow \frac{1(5^n - 1)}{5 - 1} > 500 \rightarrow 5^n > 2001 \rightarrow n > 4$$

(۵۴) اگر α و β ریشه‌های معادله ی درجه دوم $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشد مقدار عبارت

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}\right)$$

را بیابید؟

حل:

$$s = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$\left(\frac{s^2 - 2p}{p^2}\right) \left(\frac{s^2 - 3ps}{p^2}\right) = 2 \left(\frac{-5}{2}\right) = -5$$

(۵۵) اگر مجموع ضرایب بسط $(2a+b)^{2n}$ از مجموع ضرایب بسط $(2a+b)^n$ ، ۶۴۸۰ واحد بیشتر باشد n را

تعیین کنید و جمله وسط بسط $(2a+b)^{2n}$ را حساب کنید.

حل:

$$3^{2n} - 3^n = 6480 \quad \underline{3^n = y} \quad y^2 - y - 6480 = 0 \rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{25921}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 81 \rightarrow n = 4 \\ y = -80 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$(2a+b)^{2n} = (2a+b)^8 \quad T_5 = \binom{8}{4} (2a)^4 b^4 = 112 \cdot a^4 b^4$$

(۵۶) اگر $x < 0$ باشد بیشترین مقدار $x + \frac{9}{x}$ را حساب کنید.

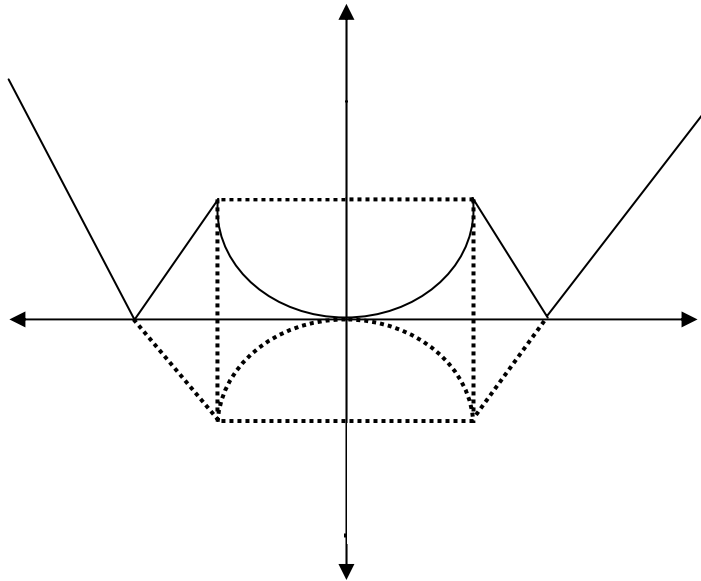
حل:

$$x + \frac{9}{x} = -\left(-\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{-x}}\right)^2 - 6$$

بیشترین مقدار عبارت فوق وقتی است که $x = -3$ باشد یعنی اصل پراتنز صفر باشد یعنی:

$$x < 0 \rightarrow \max\left(x + \frac{9}{x}\right) = -6$$

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < 1 \\ -x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x \end{cases} \quad (57) \text{ اگر } f(x) \text{ باشد نمودار } y = |f(x)| \text{ را رسم کنید.}$$



۵۸) مجموع ۶ جمله اول یک دنباله هندسی ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول آن دنباله است. قدر نسبت دنباله را بیابید.

حل:

$$S_6 = 28S_3$$

$$a \left(\frac{1 - q^6}{1 - q} \right) = 28a \left(\frac{1 - q^3}{1 - q} \right) \xrightarrow{q \neq 1} \frac{1 - q^6}{1 - q^3} = 28$$

$$\xrightarrow{q \neq 1} 1 + q^3 = 28 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$$

۵۹) مقدار B را طوری بیابید که باقی مانده تقسیم $f(x) = x^6 - 2Bx^4 + 5x^2$ بر $x + 1$ مساوی دو باشد.

حل:

$$x + 1 \text{ بر } f(x) \text{ باقی مانده } 1 - 2B + 5 = 2 \Rightarrow -2B = -4 \Rightarrow B = 2 = 2 \Rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow$$

۶۰) باقی مانده تقسیم $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ بر $x^3 + 2$ پیدا کنید.

حل:

$$x^3 + 2 = 0 \rightarrow x^3 = -2$$

$$x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 3 = (x^3)^2 + x^3 x^2 + x^3 x + x^2 + 2x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x^3 = -2}$$

$$2x^2 - 2x - 2 + 2x^2 + 2x + 3 = 5$$

۶۱) ریشه های معادله $|x| - |x - 2| = -2$ در کدام فاصله واقع اند؟

حل:

$$\begin{cases} x < 0 \rightarrow -x + x - 2 = -2 \rightarrow -2 = -2 \text{ ق ق} \\ x = 0 \rightarrow -2 = -2 \text{ ق ق} \\ x > 0 \rightarrow \\ \begin{cases} 0 < x < 2 \rightarrow x + x - 2 = -2 \rightarrow x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = 2 \rightarrow 2 = -2 \text{ غ ق ق} \\ 2 < x \rightarrow x - x + 2 = -2 \rightarrow 2 = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

مجموعه جواب نهایی $(-\infty, 0]$

(۶۲) اگر α و β ریشه های معادله $mx^2 - 2x - (4m+1) = 0$ باشد و داشته باشیم:

$$\alpha(1+\alpha) + \beta(1+\beta) = 11$$

مقدار m را بیابید.

حل:

$$\alpha(1+\alpha) + \beta(1+\beta) = 11 \rightarrow \alpha + \alpha^2 + \beta + \beta^2 = 11 \rightarrow (\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) = 11 \rightarrow$$

$$S + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 11 \rightarrow S + S^2 - 2P = 11 \quad (1)$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{2}{m}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-4m-1}{m} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{2}{m} + \left(\frac{2}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{-4m-1}{m}\right) = 11 \rightarrow \frac{2m+4+8m^2+2m}{m^2} = 11 \rightarrow 3m^2 - 4m - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64 \rightarrow m_1 = 2, m_2 = \frac{-2}{3}$$

(۶۳) اگر چند جمله ی $f(x) = ax^{2n+1} + x^{2n} + 2$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد مقدار a را محاسبه کنید.

حل:

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow R = f(-1) = 0 \rightarrow -a+1+2=0 \rightarrow a=3$$

(۶۴) عبارت $x^4 + 4ax^2 + 8bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. $a+b$ را حساب کنید.

حل:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} P(2) = 0 \rightarrow 16 + 16a + 16b + 1 = 0 \\ P(-2) = 0 \rightarrow 16 + 16a - 16b + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$32a = -34 \rightarrow a = -\frac{17}{16} \rightarrow b = 0 \rightarrow a+b = -\frac{17}{16}$$

۶۵) نامعادله $| -x^2 + 2 | < \sqrt{x^2 + 18}$ را حل کنید.

حل:

$$(-x^2 + 2)^2 < x^2 + 18 \rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 < x^2 + 18 \rightarrow x^4 - 5x^2 - 14 < 0 \rightarrow (x^2 - 7)(x^2 + 2) < 0 \xrightarrow{x^2 + 2 > 0} x^2 - 7 < 0 \rightarrow x^2 < 7 \rightarrow |x| < \sqrt{7} \rightarrow -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$$

۶۶) نشان دهید منحنی $P(x) = 4x^3 - 13x - 6$ در نقطه $x = 2$ محور x ها از قطع می کند و نقاط دیگر تقاطع روی محور x ها را بیابید.

حل:

منحنی محور x ها را در نقطه ای به طول ۲ قطع می کند. $P(2) = 0 \rightarrow$

چون ۲ ریشه ی منحنی است پس چند جمله ای بر $x - 2$ بخش پذیر است.

$$P(x) = 4x^3 - 13x - 6 = (x - 2)(4x^2 - 8x + 3)$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$$

۶۷) اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند بدون محاسبه ریشه های معادله حاصل عبارت

$$\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1}$$

را به دست آورید.

حل:

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -5$$

$$\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1} = \frac{\beta + 1 + \alpha + 1}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} = \frac{(\alpha + \beta) + 2}{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1} = \frac{3 + 2}{-5 + 3 + 1} = -5$$

۶۸) کشاورزی می خواهد در کنار رودخانه با حصار با طول ۲۰ متر زمینی را مرز بندی کند بیش ترین مساحتی

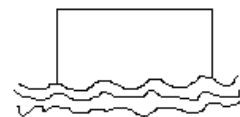
که می تواند مشخص کند چقدر است؟

حل:

$$10 = x + 2y$$

$$S = x \times y \rightarrow S(y) = (10 - 2y)y \rightarrow S(y) = -2y^2 + 10y$$

$$y_{\max} = \frac{+10}{4} = \frac{5}{2} \rightarrow x = 5 \rightarrow S = \frac{25}{2}$$



۶۹) نشان دهید معادله ی زیر جواب ندارد.

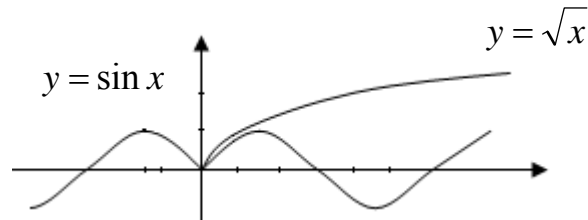
حل:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 1$$

حل: اگر $x > 0, x \neq 0$ باشد.

$$\sin x = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$



همدیگر را قطع نمی کنند لذا معادله جواب ندارد

(۷۰) اگر چندجمله ای $ax^4 - x^2 + b$ بر $x^2 + 2$ بخش پذیر باشد. باقی مانده چندجمله ای $x^6 - 2ax^3 + 3x^2 + b$ بر $x^2 + 2$ را به دست آورید.

حل:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2 = 0 &\rightarrow x^2 = -2 \\ R = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4a + 2 + b = 0 \rightarrow 4a + b = -2$$

$$x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow R = 4 + 4a + 3x^2 + b \xrightarrow{4a+b=-2} R = 3x^2 + 2$$

(۷۱) اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند نشان دهید معادله ای که ریشه هایش $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$

باشند به صورت $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$ است.

حل:

$$S = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}$$

$$P = 1 \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - \frac{b^2 - 2ac}{ac}x + 1 = 0 \rightarrow acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$$

(۷۲) معادله ای بنویسید که ریشه هایش مربع ریشه های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد.

حل:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 6 = 7$$

$$P = \alpha^2\beta^2 = 9 \rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0$$

نمونه سؤالات حسابان فصل اول طراحی شده توسط دبیران ریاضی شرکت کننده در دوره ضمن خدمت حسابان

(۷۳) یک مخزن حاوی سمی شیمیایی در زیر زمین دچار نشتی شده است، یک سال پس از شروع نشت به شعاع ۱۵۰۰ متر در اطراف مخزن گسترش پیدا کرده است. سال دوم ۷۵۰ متر دیگر گسترش پیدا می کند و به همین ترتیب هر سال نصف سال قبل گسترش می یابد بعد از ۱۰ سال این نشت تا چه فاصله ای از منبع نشت می رسد؟ آیا هیچ گاه این نشت به مدرسه ای که در ۴۰۰۰ متری این مخزن قرار دارد می رسد؟

حل:

$$S_n = \frac{n(1-q^n)}{1-q} = \frac{1500 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} = 3000 \times \frac{1.023}{1.024} = 2997 \quad q = \frac{1}{2}, a = 1500 =$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1500}{1 - \frac{1}{2}} = 3000$$

حد مجموع جملات فوق ۳۰۰۰ متر است. یعنی گسترش سم تا ۳۰۰۰ متری منبع خواهد بود و هیچگاه به مدرسه ای که در ۴۰۰۰ متری این مخزن قرار دارد نمی رسد.
(۷۴) معادله ی گویای زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$$

حل:

$$x^2 - 2x + 2 = t \rightarrow \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{6}{t+2} \rightarrow (t+1)(t+2) + 2t(t+2) = 6t(t+1)$$

$$3t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{2}{3}$$

اگر $x^2 - 2x + 2 = 1 \leftarrow x = 1$ و اگر $x^2 - 2x + 2 = -\frac{2}{3} \leftarrow \Delta < 0$ ریشه ندارد.

(۷۵) معادله درجه دومی بنویسید که مجموع ریشه های آن $2a$ و حاصلضرب ریشه های آن $a^2 - b^2$ باشد سپس ریشه های آن را حساب کنید.

حل:

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0 \rightarrow \Delta = 4a^2 - 4a^2 + 4b^2 = 4b^2$$

$$x_1 = a - b, x_2 = a + b$$

(۷۶) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{3} + \sqrt{x-4} = \sqrt{7-x}$

ب) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+1}{x}$

(حل الف)

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \\ 7-x \geq 0 \rightarrow x \leq 7 \end{cases} \rightarrow 4 \leq x \leq 7 \rightarrow 3 + \sqrt{x-4} = 7-x \rightarrow \sqrt{x-4} = 4-x \rightarrow$$

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \rightarrow 4 \geq x \\ x \leq 4 \end{cases} \rightarrow x = 4$$

تنها عددی که در دامنه این معادله قرار دارد ۴ می باشد که در معادله نیز صدق می کند پس مجموعه جواب معادله $\{4\}$ می باشد

حل ب) طرفین تساوی را در $x(x-2)$ ضرب می کنیم .

$$x^2 + 2x - 2 + x^2 - x = x^2 - x - 2 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

جواب $x=0$ چون مخرج معادله را صفر می کند پس قابل قبول نیست .

(۷۷) حاصل جمع عبارت زیر را بدست آورید.

$$S = \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots$$

حل:

$$S = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^5} + \dots \right) + \left(\frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^6} + \dots \right)$$

$$S = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \dots \right) + 3 \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots \right) = 2 \left(\frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} \right) + 3 \left(\frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{25}} \right)$$

$$S = 2 \times \frac{5}{24} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$$

(۷۸) مجموع ضرایب عددی بسط $(a+b)^{2n}$ به اندازه ۵۶ واحد بیشتر از مجموع ضرایب $(a+b)^n$ است در این صورت n را بدست آورید.

حل:

$$\leftarrow a=b=1 \text{ مجموع ضرایب } (a+b)^{2n} = 2^{2n} \text{ و مجموع ضرایب } (a+b)^n = 2^n$$

$$\rightarrow 2^{2n} = 2^n + 56 \rightarrow (2^n - 8)(2^n + 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2^n = -7 \rightarrow \text{غ ق} \\ \rightarrow 2^n = 8 \rightarrow n = 3 \end{cases}$$

۷۹) فرض کنید $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ باشد. با قیمانده تقسیم $p(x^{12})$ بر $p(x)$ را بیابید.

حل:

$$p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$p(x^{12}) = x^{60} + x^{48} + x^{36} + x^{24} + x^{12} + 1$$

$$p(x) = 0 \Rightarrow x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 = 0 \Rightarrow x^6 = 1$$

$$\Rightarrow p(x^6 = 1) = (x^6)^{10} + (x^6)^9 + (x^6)^8 + (x^6)^7 + (x^6)^6 + (x^6)^5 + 1$$

$$\Rightarrow p(x^6 = 1) = 1^{10} + 1^9 + 1^8 + 1^7 + 1^6 + 1^5 + 1 = 6$$

۸۰) معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

حل:

$$(x + 1)^{1303} + (x + 1)^{1302}(x - 2) + (x + 1)^{1301}(x - 2)^2 + \dots + (x + 1)(x - 2)^{1302} + (x - 2)^{1303} = 0$$

عبارت بالا بسط $(x + 1) + (x - 2)$ است. لذا:

$$(x + 1 + x - 2)^{1303} = 0 \Rightarrow (2x - 1)^{1303} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

معادله دارای یک جواب حقیقی است.

۸۱) اگر در یک تصاعد حسابی $S_n = xn^2 + (y - x)n$ باشد مقدار $y + 8x$ جمله چندم این تصاعد است؟

حل:

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \rightarrow s_n = na_1 + \frac{n^2d}{2} - \frac{nd}{2}$$

$$\rightarrow s_n = \frac{d}{2}n^2 + n(a_1 - \frac{d}{2})$$

طبق فرض مسئله داریم: $x = \frac{d}{4}$, $y = a_1$ پس:

$$y + 8x = a_1 + 8\left(\frac{d}{4}\right) = a_1 + 2d = a_5$$

(۸۲) اگر $ax + b$ یک عامل مشترک عبارت های $4x^2 + 4x + 1$, $2x^2 - 5x + c$ باشد مقدار c را بیابید.

حل:

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2 \rightarrow 2x + 1 = ax + b$$

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 5x + c \rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + c = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \rightarrow c = -3$$

(۸۳) معادله روبرو را حل کنید.

$$x + \sqrt{5x + 10} = 8$$

حل:

$$\sqrt{5x + 10} = 8 - x, \quad 8 - x \geq 0, \quad 5x + 10 \geq 0$$

$$\rightarrow D_f: -2 \leq x \leq 8$$

$$\rightarrow 5x + 10 = (8 - x)^2 \rightarrow x^2 - 21x + 54 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 3 \text{ ق ق}$$

$$x_2 = 18 \text{ ق غ}$$

(۸۴) اگر $|x - 1| + |a - 2| = 4$, $2 < x < 3$ باشد آنگاه a در کدام فاصله است؟

حل:

$$\left. \begin{aligned} 2 < : 3 \rightarrow 1 < x-1 < 2 \rightarrow |x-1| + |a-2| = 4 \rightarrow x-1 + |a-2| = 4 \rightarrow |a-2| = 5-x \\ 2 < : 3 \rightarrow -3 < -x < -2 \rightarrow 2 < 5-x < 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$2 < -2 < 3 \rightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \\ 4 < a \vee a < 0 \end{cases}$$

۱۵) یکی از ریشه های معادله $2x^2 - (k+1)x + 2k - 6 = 0$ برابر ۱- است. ریشه دیگر کدام است؟

حل:

$$\alpha = -1 \rightarrow 2 + (k+1) + 2k - 6 = 0 \rightarrow 3k = 3 \rightarrow k = 1 \rightarrow$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow \alpha + \beta = 1 \rightarrow \beta = 2$$

۱۶) جمله اول یک دنباله هندسی نزولی ۸۱ برابر جمله پنجم آن است. مجموع چهار جمله اول آن چند برابر جمله پنجم است؟

حل:

$$a_1 = 81a_5 \rightarrow a_1 = 81a_1q^4 \rightarrow q^4 = \frac{1}{81} \rightarrow q = \frac{1}{3} \text{ نزولی}$$

$$\frac{a_1 \left(\left(\frac{1}{3} \right)^4 - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{-80}{-1} = 80$$

$$\frac{S_4}{a_5} = \frac{80}{a_1 \left(\frac{1}{3} \right)^4} = \frac{80}{\frac{1}{81} \times \left(-\frac{2}{3} \right)} = 120$$

۱۷) اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = \frac{n^2}{2}$ باشد، جمله عمومی آنرا بیابید.

حل:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2}{2} - \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n^2 + 2n - 1) = n - \frac{1}{2}$$

۱۸) اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ باشد قدر نسبت آنرا بیابید.

حل:

$$a_1 = S_1 = 2 - 3 = -1$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (8 - 6) - (-1) = 3 \rightarrow d = 3 - (-1) = 5$$

$$\text{قدر نسبت} = 2(n^2) = 2(2) = 4$$

۸۹) حاصل $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$ را به ازای $x = \sqrt{3}$ بیابید .

حل:

$$a = x \quad \text{جمله اول} \quad q = \frac{x^2}{x} = x \quad n = 10$$

$$S_{10} = \frac{x(1-x^{10})}{1-x} = \frac{\sqrt{3}(1-(\sqrt{3})^{10})}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-3^5)}{1-\sqrt{3}}$$

۹۰) حد مجموع $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$ را بیابید .

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ \frac{2}{5} \\ q = \frac{5}{2} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \xrightarrow{S = \frac{a_1}{1-q}} S = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

۹۱) باقیمانده تقسیم $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$ را بر $x+1$ بیابید .

حل:

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow R = p(-1) = 3(-1)^4 - 5(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -5$$

۹۲) در بسط $(3x-1)^4$ تعداد جملات ، ضریب جمله ی وسط و مجموع ضرایب را بیابید .

حل:

تعداد جملات $4+1=5$ است . جمله ی وسط آن $\frac{4}{2} + 1 = 5$ یعنی جمله پنجم است پس :

$$T_5 = \binom{4}{4} (3x)^{4-4} (-1)^4 = \binom{4}{4} (3x)^4 \rightarrow \binom{4}{4} 3^4$$

برای یافتن مجموع ضرایب دو جمله ای بجای x ، یک قرار می دهیم

$$(3-1)^4 = 2^4$$

۹۳) بدون حل معادله در تعداد و علامت ریشه های معادله $2x^2 - 7x + 1 = 0$ نظر دهید .

حل:

چون $\Delta = 49 - 8 = 41 > 0$ دو ریشه حقیقی دارد

اما $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ در نتیجه دو ریشه متحد علامت اند ، پس هر دو ریشه مثبت اند .

۹۴) معادله $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$ چند جواب دارد؟

حل:

چون هر دو رادیکال نامنفی هستند پس مجموع زمانی صفر است که هر کدام صفر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 \text{ ق ق}$$

باید جوابی را قبول کنیم که هر دو را صفر می کند یعنی جواب مشترک جواب معادله است.

۹۵) در صورتی که باقی مانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $x+1$ ، $x-1$ و $x-1$ به ترتیب ۲، ۱ و -۱ باشد، باقی مانده تقسیم $p(x)$ را بر $x^3 - x$ بدست آورید.

حل:

$$p(x) = (x^3 - x)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$p(0) = 2 \Rightarrow p(0) = (0^3 - 0)Q(0) + c = 2$$

$$p(-1) = 1 \Rightarrow p(-1) = ((-1)^3 - (-1))Q(-1) + a(-1)^2 - b + c = 1 \rightarrow a - b = -1$$

$$p(1) = -1 \Rightarrow p(1) = (1 - 1)Q(1) + a + b + c = -1 \rightarrow a + b = -3$$

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = -3 \end{cases}$$

$$2a = -4 \Rightarrow a = -2, b = -1$$

۹۶) در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول ۱۲ و مجموع ۵ جمله دوم برابر ۳۰ است. مجموع ۳۰ جمله اول چقدر است؟

حل:

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$s_5 = \frac{5}{2}(2a + 4d) = 12 \Rightarrow a + 2d = \frac{12}{5} \Rightarrow 5a + 10d = 12$$

$$s_{10} - s_5 = \frac{10}{2}(2a + 9d) - \frac{5}{2}(2a + 4d) = 30 \Rightarrow a + 7d = 6$$

$$\begin{cases} 5a + 10d = 12 \\ a + 7d = 6 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{18}{25}, a = \frac{24}{25}$$

$$s_{30} = 15 \left(2 \times \frac{24}{25} + 29 \times \frac{18}{25} \right) = 372$$

۹۷) کدام جمله از بسط $(x^3 + \frac{1}{x})^8$ مستقل از x است؟

حل:

$$(x^3)^{8-k} \times (\frac{1}{x})^k = 1 \Rightarrow x^{24-3k} \times x^{-k} = x^0 \Rightarrow 24-4k=0 \Rightarrow k=6 \Rightarrow k+1=7$$

۹۸) مقادیر n, m را چنان تعیین کنید که چند جمله ای $x^3 - 2mx^2 + nx - 1$ بر $x^2 + 3x + 2$ بخش پذیر باشد.

حل:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 - 2m(-1)^2 + n(-1) - 1 = 0 \Rightarrow -2m - n = 2$$

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 - 2m(-2)^2 + n(-2) - 1 = 0 \rightarrow -8m - 2n = 9$$

$$\begin{cases} -8m - 2n = 9 \\ -2m - n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8m - 2n = 9 \\ 4m + 2n = -4 \end{cases} \rightarrow -4m = 5 \rightarrow m = \frac{-5}{4}$$

$$-2(\frac{-5}{4}) - n = 2 \Rightarrow -n = 2 - \frac{5}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

۹۹) مقدار ماکزیمم تابع $y = 6 + 4x - x^2$ را به دست آورید.

حل: روش اول

$$y = -(x^2 - 4x - 6) = -[(x^2 - 4x + 4) - 4 - 6]$$

$$y = -(x-2)^2 + 10 \text{ رأس } S(2, 10) \rightarrow y_{\max} = 10$$

روش دوم: تابع دارای ماکزیمم است. $a = -1 < 0 \rightarrow$

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 + 24)}{4(-1)} = 10$$

۱۰۰) مجموع ضرایب در بسط $(3x^3 - 4y)^{10}$ را به دست آورید.

حل:

$$\text{مجموع ضرایب} = (3(1)^3 - 4(1))^{10} = (-1)^{10} = 1$$

۱۰۱) معادله زیر را حل کنید.

$$(x^2 + 2x^2)^2 - 5(x^2 + 2x^2) + 6 = 0$$

حل:

$$x^2 + 2x^2 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = +2, t = 3$$

$$t = 2 \Rightarrow x^2 + 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{y=x^2} y^2 + 2y - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta = (+2)^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12$$

$$y_1, y_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x^2 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{12} - 2}{2}}$$

$$t = 3 \Rightarrow x^2 + 2x^2 = 3 \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

۱۰۲) جمله ششم یک دنباله هندسی ۸ برابر جمله سوم آن است. اگر $a = -3$ مجموع هفت جمله اول را

حساب کنید.

حل:

$$a_6 = 8a_3 \rightarrow aq^5 = 8aq^2 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow S_7 = -3 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} = -3 \times 7 = -21$$

۱۰۳) جمله فاقد x را در بسط $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ به دست آورید.

حل:

$$\text{جمله } i+1 \text{ ام} = \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

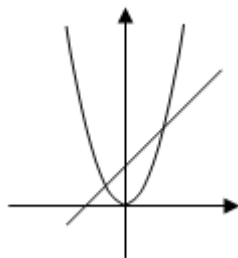
$$(x^2 - \frac{1}{x})^6 \text{ جمله عمومی} = \binom{6}{i} (x^2)^{6-i} (\frac{1}{x})^i = \binom{6}{i} (x^{12-2i}) (\frac{1}{x^i}) = \binom{6}{i} x^{12-3i}$$

$$12 - 3i = 0 \Rightarrow -3i = -12 \Rightarrow i = 4$$

$$x \text{ فاقد جمله} = \binom{6}{4} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

۱۰۴) نامعادله $x^2 < 2 + x$ را به روش هندسی حل کنید.

حل:



$$M = [-1, 2]$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow \text{ج}$$

۱۰۵) اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - x + 1 = 0$ باشند حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ را بیابید.

حل:

$$s = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2} \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\frac{1}{2})^2 - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$$

۱۰۶) اگر باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ و $x+1$ به ترتیب ۳ و -2 باشند باقیمانده آن را بر $x^2 - x - 2$ به دست آورید.

حل:

$$P(x) = (x^2 - x - 2)Q(x) + \underbrace{ax + b}_{R(x)}$$

$$\begin{cases} P(2) = 3 \rightarrow 2a + b = 3 \\ P(-1) = -2 \rightarrow -a + b = -2 \end{cases} \rightarrow b = \frac{-1}{4}, a = \frac{5}{4} \rightarrow R(x) = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$$

۱۰۷) در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب ها دو واحد بیشتر از دیگری باشد.

الف) m را بیابید. ب) مقدار $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$ را بیابید.

حل الف)

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases} \rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow 3 = \frac{m}{2} \rightarrow m = 6$$

حل ب)

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 \beta^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3} = \frac{4^3 - 3(3)(4)}{3^3} = \frac{64 - 36}{27} = \frac{28}{27}$$

۱۰۸) حاصل عبارت $(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{\wedge})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{\wedge})$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را بیابید.

حل:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^n) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} \times \frac{1 - (-x)^{2n+1}}{1 - (-x)} =$$

$$\frac{(1 - x^{2n+1})(1 + x^{2n+1})}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1 - x^{4n+2}}{1 - x^2}$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1 - (\sqrt{2})^{4n+2}}{1 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1 - 2^{2n+1}}{1 - 2} = 2^{2n+1} - 1$$

۱۰۹) اگر باقیمانده تقسیم چند جمله ای $p(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب برابر با ۱ و ۴ باشد، باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر x^2+x-2 را بیابید.

حل:

$$p(1) = 1, \quad p(-2) = 4$$

$$p(x) = (x^2 + x - 2)Q(x) + (ax + b) \Rightarrow p(x) = (x + 2)(x - 1)Q(x) + (ax + b)$$

$$p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$p(-2) = 4 \Rightarrow -2a + b = 4 \Rightarrow a = -1, \quad b = 2$$

۱۱۰) در یک دنباله حسابی $S_{15} = 570$ ، $a_8 = 23$ است. جمله عمومی این دنباله را مشخص کنید.

حل:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2a + 14d) \rightarrow 570 = 15(a + 7d) \rightarrow a + 7d = 38$$

$$a_8 = a + 7d \rightarrow 23 = a + 7d$$

$$-1 \begin{cases} a + 7d = 38 \\ a + 7d = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - 7d = -38 \\ a + 7d = 23 \end{cases}$$

$$\frac{-3d}{-3} = \frac{-15}{-3} \rightarrow d = 5$$

$$a + 35 = 38$$

$$a = 38 - 35 = 3$$

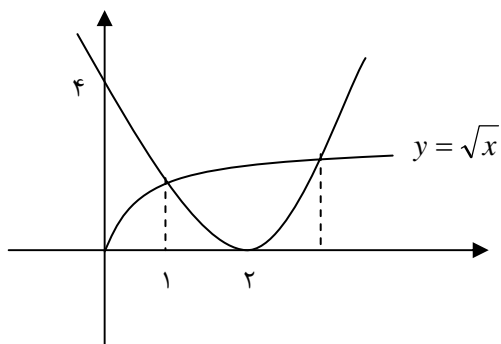
$$a_n = a + (n-1)d = 3 + (n-1)5 \rightarrow a_n = 5n - 2$$

۱۱۱) به روش هندسی معادله $\sqrt{x} + 4x = x^2 + 4$ را حل کنید و جواب تقریبی آن را بیابید.

حل:

$$\sqrt{x} = x^2 - 4x + 4 \rightarrow \sqrt{x} = (x-2)^2$$

حال دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = (x-2)^2$ را رسم می کنیم.



باید توجه داشت که $x \geq 0$ باشد.

یک جواب معادله ۱ می باشد زیرا در نقطه $x = 1$ همدیگر را قطع کرده اند و جواب دیگر معادله بین ۳ و ۴ می

باشد. زیرا اگر داشته باشیم:

$$h(x) = \sqrt{x} + 4x - x^2 - 4$$

$h(3) > 0$, $h(4) < 0$, بنابراین معادله $h(x) = 0$ جوابی بین ۳ و ۴ دارد.

(۱۱۲) معادلات زیر را حل کنید.

الف)
$$\frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{2x^2 - 7x + 3}$$

ب)
$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x} + 2} - 3} = 1$$

الف)
$$D = R - \left\{ 3, \frac{1}{2} \right\}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = (x-3)(2x-1)$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow 2x^2 - x - x + 3 = 5x \rightarrow x(2x-1) - (x-3) = 5x \rightarrow$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4} \begin{cases} \text{غ ق ق } x=3 \\ \text{غ ق ق } x=\frac{1}{2} \end{cases} \Delta = 49 - 24 = 25 \rightarrow$$

ب) $x \geq 0$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x} + 2} - 3} \geq 0 \rightarrow x \geq 49 \rightarrow D = [49, +\infty)$

$$\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{x} + 2} - 3} \right)^2 = (1)^2 \rightarrow \sqrt{\sqrt{x} + 2} - 3 = 1 \rightarrow$$

$$(\sqrt{\sqrt{x} + 2})^2 = (4)^2 \rightarrow \sqrt{x} + 2 = 16 \rightarrow \sqrt{x} = 14 \rightarrow x = 196$$

(۱۱۳) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 6x + 8 = 0$ باشند مطلوبست محاسبه: $\alpha\beta^3 + \alpha^3\beta$

حل:

$$\alpha\beta^3 + \alpha^3\beta = \alpha\beta(\beta^2 + \alpha^2) = \alpha\beta[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] = 8 \left[(-6)^2 - 2(8) \right] = 160$$

(۱۱۴) معادله $x + \sqrt{x} = 2$ را حل کنید.

حل:

داریم $\sqrt{x} = 2 - x$ و با شرط $x \geq 0, 2 - x \geq 0 \rightarrow 2 \geq x$ دو طرف را به توان ۲ می رسانیم و داریم

$$x = 4 + x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=4 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(۱۱۵) نا معادله زیر را حل کنید.

$$(1-x)^2 - \sqrt{(1-x)^2} - 2 < 0$$

حل:

$$(1-x)^2 - |1-x| - 2 < 0$$

$$x \geq 1 \rightarrow (1-x)^2 + (1-x) - 2 < 0 \rightarrow x^2 - 3x < 0 \rightarrow x \in (0, 3)$$

$$x < 1 \rightarrow (1-x)^2 - (1-x) - 2 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow x \in (-1, 2)$$

$$x \in (-1, 3) \text{ جواب نهایی}$$

(۱۱۶) چرخ و فلک شهر بازی وقتی حداکثر سرعت دارد ۷۵ متر جابه جا می شود. هر بار مقدار جا به جایی آن $\frac{2}{5}$ دفعه قبل است. اگر تا ایست کامل این کار ادامه یابد در مجموع چرخ و فلک چند متر جابه جایی دارد؟

حل:

دنباله ی هندسی می باشد $75, 75 \times \frac{2}{5}, 75 \times (\frac{2}{5})^2, 75 \times (\frac{2}{5})^3, \dots$

$$a_1 = 75, \quad q = \frac{2}{5}$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{75}{1-\frac{2}{5}} = \frac{75}{\frac{3}{5}} = \frac{75 \times 5}{3}$$

در مجموع چرخ و فلک ۱۲۵ متر جا به جایی دارد $S = 125$

(۱۱۷) اگر $|ar| < 1$ حد مجموع زیر را پیدا کنید.

حل:

$$S = 1 + (1+a)r + (1+a+a^2)r^2 + (1+a+a^2+a^3)r^3 + \dots$$

S را در r ضرب می کنیم دو رابطه را از هم کم می کنیم .

$$rS = r + (1+a)r^1 + (1+a+a^2)r^2 + (1+a+a^2+a^3)r^3 + \dots$$

$$(1-r)S = 1 + ar + a^2r^2 + a^3r^3 + \dots = \frac{1}{1-ar} \Rightarrow S = \frac{1}{(1-r)(1-ar)}$$

(۱۱۸) حاصل $A = (x^{21} - 1)(1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-20})^{-1}$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} A &= (x^{21} - 1) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{20}} \right)^{-1} \\ &\Rightarrow A = (x^{21} - 1) \left(\frac{x^{20} + x^{19} + \dots + 1}{x^{20}} \right)^{-1} \\ &\Rightarrow A = (x^{21} - 1) \left(\frac{x^{20}}{x^{20} + x^{19} + \dots + 1} \right) \\ &\Rightarrow A = x^{20} (x - 1) \\ &\Rightarrow A = (\sqrt{2})^{20} (\sqrt{2} - 1) = 1024(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

(۱۱۹) $\frac{1}{5}$ آب موجود در آب انباری را مصرف می کنند. پس از آن $\frac{1}{5}$ آب باقی مانده را نیز خارج می کنند بعد از

این برداشت آب باقی مانده در آب انبار به اندازه $\frac{1}{5}$ گنجایش آن است. حساب کنید چه کسری از آب انبار آب داشته است؟

راه حل: فرض کنیم موجودی آب انبار x و گنجایش آب انبار $1 =$

چون $\frac{1}{5}$ آب موجود به مصرف می رسد پس $\frac{4}{5}x$ باقی مانده $\frac{1}{5}$ این مقدار برابر $\frac{4}{25}x = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}x$ است.

$$\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{5}{16}$$

(۱۲۰) حاصل عبارت $A = (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (2^2 - 1)$ را به کمک دنباله

حسابی بیابید؟

حل:

$$A = (100 + 99)(100 - 99) + (98 + 97)(98 - 97) + \dots + (2 + 1)(2 - 1)$$

$$A = 199 + 195 + \dots + 3 \rightarrow a = 199, d = -4$$

$$a_n = a + (n - 1)d \Rightarrow 3 = 199 + (n - 1)(-4) \Rightarrow n = 50$$

$$A = \frac{50}{2}(3 + 199) = 5050$$

۱۲۱) برای محافظت از تابش های مضر نور خورشید به پوست لایه های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۰ درصد کاهش یابد؟

حل:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{90}{100} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{9}{10} \rightarrow 1 - (\frac{1}{2})^n > 0.9$$

$$1 - 0.9 > \frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{1}{10} > \frac{1}{2^n} \rightarrow 2^n > 10 \rightarrow n \geq 4$$

۱۲۲) در یک دبستان تعداد دانش آموزان بین ۲۵۰ تا ۳۲۰ دانش آموز است. اگر این دانش آموزان را ۳ تا ۳ تا و پنج تا پنج تا و ۱۲ تا ۱۲ تا بشماریم در هر حالت ۲ دانش آموز باقی می ماند. تعداد دانش آموزان چند تا است؟

حل خلاصه شده:

$$[3, 5, 12] = 60 \Rightarrow 60 \times 5 = 300 \Rightarrow 300 = M - 2 \Rightarrow M = 302$$

۱۲۳) حدود x در تساوی $[x - 4] + [x + 1] = 5$ را تعیین کنید.

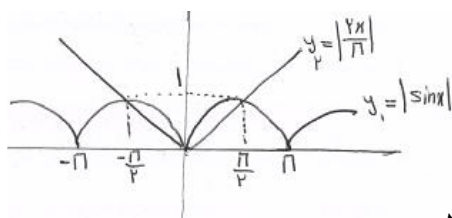
$$[x] - 4 + [x] + 1 = 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

۱۲۴) باقیمانده ی تقسیم تابع $f(x) = 2x^2 + nx^2 - x + 3$ بر $x - 2$ برابر با ۱ است. باقیمانده ی تقسیم $f(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید.

$$f(2) = 1 \Rightarrow 16 + 4n - 2 + 3 = 1 \Rightarrow n = -4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x^2 - x + 3$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2$$

۱۲۵) مجموعه جواب نامعادله $|\sin x| \geq \left| \frac{2x}{\pi} \right|$ را به دست آورید



با رسم نمودارهای توابع $y = \left| \frac{2x}{\pi} \right|$ و $y = |\sin x|$

نتیجه می شود $|x| \leq \frac{\pi}{2}$

۱۲۶) در دنباله هندسی غیر نزولی که جملات اول و سوم آن به ترتیب ۳ و $\frac{3}{4}$ می باشد حد مجموع برابر با

چيست؟

$$a_r = aq^r \rightarrow \frac{3}{4} = 3q^r \rightarrow q^r = \frac{1}{4} \rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

چون دنباله غیر نزولی است پس $q = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = 2$$

(۱۲۷) مجموع ۶ جمله اول یک دنباله هندسی ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول آن دنباله است. قدر نسبت دنباله را بیابید.

$$S_6 = 28S_3$$

$$a \left(\frac{1-q^6}{1-q} \right) = 28a \left(\frac{1-q^3}{1-q} \right) \xrightarrow{q \neq 1} \frac{1-q^6}{1-q^3} = 28$$

$$\xrightarrow{q \neq 1} 1+q^3 = 28 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$$

(۱۲۸) مقدار B را طوری بیابید که باقی مانده تقسیم $f(x) = x^6 - 2Bx^5 + 5x^2$ بر $x+1$ مساوی دو باشد.

$$R=2 \Rightarrow P(-1)=2 \Rightarrow 1-2B+5=2 \rightarrow -2B=-4 \rightarrow B=2$$

$$1-2B+5 \Rightarrow -2B=-4 \Rightarrow B=2$$

(۱۲۹) معادله قدر مطلق زیر را حل کنید

$$|2x+1|-|x|=4 \quad -2x-1+x=-x-1=4 \rightarrow x=-5$$

$$\begin{cases} -x-1=4 & x < -\frac{1}{2} \rightarrow x=-5 \\ 3x=3 & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \rightarrow x=1 \\ x=3 & 0 \leq x \rightarrow x=3 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

(۱۳۰) در یک دنباله ی عددی با جمله ی اول a اگر به قدر نسبت آن یک واحد افزوده شود، آن گاه به مجموع بیست جمله ی اول آن چقدر افزوده می شود؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow S'_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)(d+1)]$$

$$\Rightarrow S'_{10} = \frac{10}{2} [2a + (10-1)(d+1)] = 5 \cdot [2a + 9(d+1)] = 5 \cdot [2a + 9d + 9] \\ = 5 \cdot [2a + 9d] + 45 = S_{10} + 45$$

۱۳۱) به ازای چه مقدار a نامساوی $\frac{x^2 + 3x + a}{x^2 + x + 1} < 2$ همواره برقرار است؟

حل:

$$\frac{x^2 + 3x + a}{x^2 + x + 1} < 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 3x + a}{x^2 + x + 1} - 2 < 0 \Rightarrow \\ \frac{x^2 + 3x + a - 2x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + x + (a-2)}{x^2 + x + 1} < 0$$

با توجه به این که مخرج ریشه ندارد و ضریب x^2 نیز در آن مثبت است، پس عبارتی است همواره مثبت

$$\Rightarrow -x^2 + x + (a-2) < 0 \xrightarrow{\Delta < 0} 1 + 4a - 8 < 0 \rightarrow 4a < 7 \rightarrow a < \frac{7}{4}$$

۱۳۲) دانش آموزان کلاس سوم ریاضی یک دبیرستان از دبیر حسابان خود پرسیدند: چند فرزند داری؟ معلم پاسخ داد: دو برابر توان دوم فرزندان من ۱۸ واحد از ۱۳ برابر آن عده کمتر است تعداد فرزندان معلم را به دست آورید.

حل:

تعداد فرزندان $x =$

$$2x^2 + 18 = 13x \rightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0 \rightarrow x = 2$$

۱۳۳) چه مقدار آب باید تبخیر شود تا از ۱۵ لیتر محلول حاوی ۱۲ درصد رنگ به محلولی با ۲۰ درصد رنگ برسیم. (فرض کنید هیچ مقدار رنگ در عمل تبخیر، از بین نمی رود.)

حل:

مقدار آب تبخیر شده $x =$

$$\frac{12}{100} \times 15 = \frac{9}{5}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{20}{100} \rightarrow 9 = 15 - x \rightarrow x = 6 \text{ lit}$$

نمونه سؤالات حسابان فصل اول طراحی شده توسط دبیران ریاضی شرکت کننده در دوره ضمن خدمت حسابان

۱۳۴) مهسا و یاسمن هر دو مهندس کامپیوتر (نرم افزار) و همکار هستند. یاسمن می تواند برنامه ای را در مدت معینی اجرا کند. و مهسا برای همین برنامه ۵ روز کمتر وقت صرف می کند. اگر هر دو با هم کار کنند در مدت ۶ روز برنامه اجرا می شود هر یک به تنهایی چند روزه برنامه را اجرا می کند؟

حل:

تعداد روزهای یاسمن $x =$ تعداد روزهای مهسا $x - 5 =$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6} \rightarrow 6x - 30 + 6x = x^2 - 5x \rightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 15 & \text{ق ق} \\ x = 2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مدت کار یاسمن ۱۵ روز و مدت کار مهسا ۱۰ روز می باشد.

۱۳۵) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشد حاصل $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بدست آورید.

حل:

$$S = \alpha + \beta = 6 \quad P = \beta\alpha = 3 \rightarrow \frac{S^3 - 3PS}{P} = \frac{6^3 - 3 \times 3 \times 6}{3} = 54$$

بنابر این حاصل $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 54$

۱۳۶) معادله گنگ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2 + \sqrt{x-3}} = \sqrt{5-x}$$

حل:

$$2 + \sqrt{x-3} = 5-x \Rightarrow \sqrt{x-3} = 3-x \rightarrow x-3 = (3-x)^2$$

$$\rightarrow x-3 = 9 + x^2 - 6x \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \text{ق ق} & x = 3 \\ \text{غ ق ق} & x = 4 \end{matrix}$$

مجموعه جواب $\{3\}$ با قراردادن در معادله اصلی

۱۳۷) مجموع جملات یک دنباله هندسی نامتناهی که جمله سوم آن ۳ و قدر نسبت آن $\frac{1}{4}$ باشد چقدر است؟

حل:

$$a_r = aq^{r-1} \Rightarrow a = \frac{a_r}{q^{r-1}} = \frac{3}{\frac{1}{16}} = 48 \quad S = \frac{a}{1-q} = \frac{48}{1-\frac{1}{4}} = 64$$

۱۳۸) اگر α و β ریشه های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشد مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \xrightarrow{:\div 4} x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow S = 3, P = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} = \frac{\sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha \cdot \beta}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$