

پاسخ ریاضیات

۸۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$x + 2(\cdot) + 1 \times 7 = y \Rightarrow x + 7 = y \Rightarrow \boxed{x - y = -7}$$

۸۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+3 & 2 \\ 1 & a-5 \end{vmatrix} = (a+3)(a-5) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$a^2 - 2a - 15 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 17 = 0 \Rightarrow (a-7)(a+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ a=-5 \end{cases}$$

۸۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{7-16} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

۸۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{گزینه درست} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \times 2^4$$

۸۵- گزینه ۳ صحیح است.

۵! کتابهای ریاضی

۴! کتابهای ادبی

۴! × ۵! × ۵! = کل کتابها

۸۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow (x^2 - 2) = 0$$

$$f'(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-7)(2-8)(2-9)(2-10)$$

$$= 2\sqrt{2} \times -1 \times -2 \times -3 \times \dots \times -8 = 2\sqrt{2}(8!)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}(x - \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times f'(\sqrt{2}) = 2 \times 8!$$

۸۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = \frac{f'g + g'f}{fg} = \frac{(fg)'}{fg} \stackrel{①}{=} -\tan x = -f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) \times g(x) = \cos x &\rightarrow (f \times g)'(x) = -\sin x \\ (f \cdot g)(x) = \cos x &\end{aligned} \right\} \stackrel{①}{\circlearrowleft}$$

۸۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\sec^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x$$

$$f'''(x) = -4 \sin 2x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4(1) = -4$$

۸۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$y = x \Rightarrow m = 1$$

$$y' = 2x^2 - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \begin{cases} A(1, -1) \\ B(-1, -5) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۹۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مشتق پذیر} \quad h = f + g \\ \text{مشتق پذیر} \quad k = f - g \end{array} \right\} \Rightarrow h + k = f + g + f - g = 2f \Rightarrow f \text{ مشتق پذیر (غیرممکن) پس گزینه ۳ نادرست است}$$

۹۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 & x \geq -4 \\ -(x+4)^2 & x < -4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2(x+4) & x \geq -4 \\ -2(x+4) & x < -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = f(-4) = 0 \text{ پیوسته است}$$

$$f'_+(-4) = f'_-(-4) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > -4 \\ \text{مشتق پذیر نیست} & x = -4 \\ -2 & x < -4 \end{cases}$$

۹۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + \Delta f(x) + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x)+1)(f(x)+4)}{x-1} = f'(1) \times (-1+4) = 2 \times 3 = 6$$

$$y = 2x - 3 \quad \begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f'(1) = 2 \end{array}$$

۹۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}$$

۹۴- گزینه ۳ صحیح است.

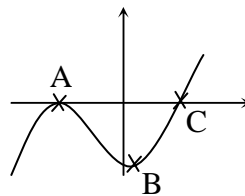
$$S = \pi r^2 \rightarrow \frac{ds}{dr} = 2\pi r = 2\pi \times 10 = 200\pi$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 200\pi \times 0.4 = 80\pi$$

۹۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$f'_+(\cdot) = 0 = m_1 \quad f'_-(\cdot) = 1 = m_2$$

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1 \Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$



۹۶- گزینه ۱ صحیح است.

نقطه A عطف

نقطه B عطف

نقطه C می نیم

۹۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$P = x^3 + (1-x)^3 = x^3 + 1 - 3x^2 + 3x - x^3 = -3x^2 + 3x + 1$$

$$P' = -6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۹۸- گزینه ۴ صحیح است.

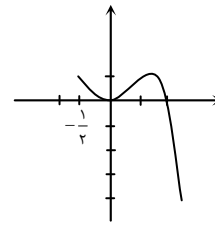
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \xrightarrow{x=0} y' = 0 \quad y'' = \frac{+2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ نقطه عطف}$$

و چون $y' \geq 0$ است پس تابع صعودی است پس گزینه ۴ صحیح است.

۹۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-6x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
y	1	0	1	-4



دو ماکزیمم و دو می‌نیمم

۱۰۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(0) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{b} = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = 2$$

$$y = \dots \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} -x^2 + ax - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$a = 2 \Rightarrow x = 1 > 0 \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$a = -2 \Rightarrow \text{ق ق ق} \Rightarrow a + b = -2 + 2 = 0$$

۱۰۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{MA'}{MA} = K \Rightarrow \frac{A' - M}{A - M} = K \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + (k-1)\alpha}{k} \\ y = \frac{y' + (k-1)\beta}{k} \end{cases} \quad \begin{matrix} M \\ \beta \\ \alpha \end{matrix} \text{ مرکز تجانس} \quad K = 3 \quad \begin{matrix} -2 = \alpha \\ 3 = \beta \end{matrix}$$

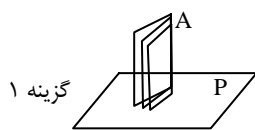
$$\begin{cases} x = \frac{x' - 4}{3} \\ y = \frac{y' + 6}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{y' + 6}{3} - x' + 4 = 5 \Rightarrow -3x' + y' = -3$$

$$a = -3 \quad b = 1 \quad c = -3 \quad a + b + c = -5$$

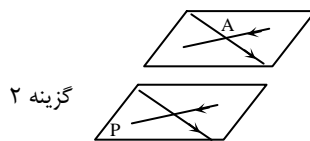
۱۰۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}]{T(x,y) = (x+3, y-1)} C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{R}(x,y) = (-y, x)]{R_O^{90^\circ}} A' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۰۳- گزینه ۴ صحیح است. هر خط که از A بگذرد و با یکی از خطوط P موازی باشد با P موازی است گزینه ۴ نادرست است.

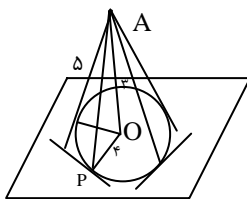


گزینه ۱



گزینه ۲

۱۰۴- گزینه ۱ صحیح است. مثلث AOP قائم‌الزاویه است (۳ و ۴ و ۵) اعداد فیثاغورسی هستند به مرکز O و به شعاع ۴ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم می‌دانیم خط مماس بر شعاع در نقطه‌ی تماس عمود است بنابراین هر خط در صفحه که بر این دایره مماس باشد جواب مسأله است.



۱۰۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1+a^2 \end{bmatrix} \quad |A| = 1 \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = A^{-1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a^2 = 1 \end{cases}$$

۱۰۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} (R_\theta)^n = R_{n\theta}$$

$$A^{600} = 2^{600} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{600} = 2^{600} \begin{bmatrix} \cos 100\pi & -\sin 100\pi \\ \sin 100\pi & \cos 100\pi \end{bmatrix} \quad A^{600} = 2^{600} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2^{600} I$$

۱۰۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$-R_2 + R_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow{(1_1+1_2)+1_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1+x+y+z \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1+x+y+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

۱۰۸- گزینه ۱ صحیح است.

$|A^T| = |A|$ و

$$\left| \frac{1}{2} AA^T \right| = \frac{1}{8} |A| |A^T| = \frac{1}{8} |A|^2$$

$$|A| = 2(-5) + 1(35) = 20$$

$$\left| \frac{1}{2} AA^T \right| = \frac{1}{8} \times 20^2 = 50$$

۱۰۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(10-9) = 3$$

۱۱۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$|A| = 1(9) - 2(0) + 3(-6) = -9$$

$$A^{-1} \text{ درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم} = \frac{\text{همسازه سطر ۳ و ستون ۲}}{|A|} = \frac{(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-(-6)}{-9} = -\frac{2}{3}$$

۱۱۱- گزینه ۴ صحیح است. در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع اعداد برآمده برابر k باشد.

نکته:
$$\begin{cases} \textcircled{1} k \leq 6 \Rightarrow P = \frac{k-1}{36} \\ \textcircled{2} k > 6 \Rightarrow P = \frac{13-k}{36} \end{cases}$$

$$k = 7 \Rightarrow P = \frac{13-7}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \leftarrow \text{مجموع برابر ۷}$$

$$P' = 1 - P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

۱۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad P(A \cap B) = x$$

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

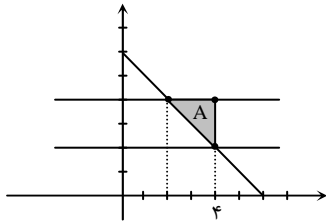
$$\frac{P(A \Delta B)}{P(A \cap B)} = \frac{4x + 2x - 2x}{x} = 3$$

۱۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{اگر } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x \leq \cos x$$

$$\text{اگر } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \Rightarrow \cos x < \sin x$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(s)} = \frac{\frac{3}{4} \pi}{\pi} = \frac{3}{4}$$



۱۱۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(s)} = \frac{\frac{2 \times 2}{2}}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$$

۱۱۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$15a \equiv 2 \cdot b \xrightarrow{\div 5} 3a \equiv 4b \xrightarrow{\cdot 3} 9a \equiv 12b$$

$$3a - 4b = 3k \Rightarrow 3 | 4b \Rightarrow 3 | b \Rightarrow \underline{b \equiv 3}$$

۱۱۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} 2^{10} \equiv 2 \\ 3^{10} \equiv 3 \\ 4^{10} \equiv 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} - 16 \equiv 2 + 3 + 4 - 16 \equiv -7$$

$$-7 \equiv 3 \Rightarrow 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} - 16 \equiv 3 \quad \text{باقی مانده برابر ۳}$$

۱۱۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$200x + 500y = 5100 \quad 2x + 5y = 51 \quad (2, 5) = 1 \Rightarrow 1 | 51$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 9 - 2k \end{cases}$$

$$(3, 9), (8, 7), (13, 5), (18, 3), (23, 1)$$

۱۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

نادرست $I_3 \ll M \Rightarrow (3, 3) \notin R$ بازتابی نیست

$$(1, 2) \in R, (2, 1) \in R \Rightarrow M \wedge M^T \ll I_3$$

پادتقارنی نیست

$$(2, 3) \in R, (3, 2) \notin R \Rightarrow M^T \neq M \text{ تقارنی نیست}$$

$$\Rightarrow M^{(2)} \ll M \text{ چون خاصیت تراپایی دارد}$$

۱۱۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$x_1 + x_2 = 7 \xrightarrow{\text{تعداد جوابها}} \binom{7+2-1}{2-1} = 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \Rightarrow x_3 + x_4 = 12 - 7 = 5 \Rightarrow \binom{5+2-1}{2-1} = 6$$

$$\text{تعداد جواب} = 8 \times 6 = 48$$

۱۲۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$\varphi(385) = 5 \times 7 \times 11 \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 4 \times 6 \times 10 = 240$$

$$\begin{array}{r|l} 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$