بسمه تعالی

مقدمه

سپاس بیکران شایسته ی خداوندی است که انسان را آفرید و او را هوش و ذکاوت عطا فرمود تا بتواند با کسب علم و دانش راه سعادت و تعالی را در پیش گیرد.

مجموعه ای که پیش روی شماست حاوی نکات کلیدی و اساسی کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی است. در این مجموعه نکات مهم و طلایی به همراه مثال ، تست ، پاسخ تشریحی و خود آزمایی و بر اساس نظم وترتیب فصول کتاب درسی گرد آوری شده است به طوری که دانش آموز علاقه مند ، می تواند از آغاز سال تحصیلی متناسب با پیشرفت کتاب درسی از این مجموعه استفاده کند.

مجموعه ی حاضر سعی بر آن دارد تا در عین دقت نظر کافی بر مفاهیم کتاب درسی ، دانش آموزان را با نمونه ای از سؤالات مسابقات علمی ، آزمون های ورودی مدارس نمونه دولتی و تیز هوشان و المپیادها آشنا ساخته و زمینه مناسبی را برای مطالعه و تفکر و بارور شدن استعدادهای درخشان آنان فراهم نماید.بدیهی است که این مطالب زمانی نتیجه مطلوب را خواهد داشت که دانش آموز ، نخست با مطالعه و درک عمیق از کتاب درسی ریاضی مسائل و تمرین های کتاب درسی را حل نموده و سپس برای ارتقاء معلومات خود از این مجموعه استفاده کند.

فصل ۱

نکات طلایی اعداد طبیعی و تناسب معکوس

نکته ۱: الف)عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

ب)اعدادی که مجذور کامل هستند تعداد مقسوم علیه های آنها فرد است.

مثال: اگر $A = \{1, x, y, z, \frac{z^2}{y}, \frac{z^2}{x}, z^2\}$ مجموعه مقسوم علیه های یک عدد باشد آن عدد برابر است با:

۱) ۵۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۴۰ ۴) ۶۴

پاسخ: مجموعه A دارای ۷ عضو است که عددی فرد می باشد و چون فقط عدد ۶۴ مجذور کامل است پس پاسخ صحیح گزینه «۴» می باشد.

نکته۲: اعداد اولی که اختلاف آن ها ۲ واحد باشد **اعداد اول دو قلو** نامیده می شوند.

مثال: تعداد اعداد اول دو قلو بین ۱۰ و ۵۰ چند تاست؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: اعداد اول دو قلو عبارتند از: (۴۳و۴۱) و (۳۱ و۲۹) و (۱۹ و ۱۷) و (۱۳ و ۱۱) بنابراین گزینه «۳» صحیح است.

نکته ۳: برای اینکه بدانیم عددی تواندار بر چند عدد اول بخش پذیر است،پایه ی آن عدد را به اعداد اول تجزیه می نماییم تا تعداد اعداد اول مشخص شود.

مثال: عدد طبیعی $۷ \times ۲۵^{۳} \times ۴^{۲}$ بر چند عدد اول بخش پذیر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۱» زیرا اعداد ۴ و ۲۵ و ۷ به ترتیب دارای مقسوم علیه های اول ۲ و ۵ و ۷ هستند.

نکته ۴: برای تعیین رقم یکان: ۱)اگر رقم یکان یکی از اعداد ۰ ، ۱ ، ۵ یا ۶ باشد به توان هر عددی برسد رقم یکان تغییر نمی کند.

۲)اگر رقم یکان ۲،۳،۴،۷،۸ یا۹ باشد توان عدد را بر عدد ۴ تقسیم نموده و پایه را به توان باقی مانده محاسبه می کنیم.چنانچه باقی مانده صفر شود به جای صفر عدد ۴ را قرار می دهیم.

مثال: کدام یک از اعداد زیر اول است؟

۱) ۱۴۰۹ ۲) $۵^{۴^{۳}} \times ۲^{۷۵}$

۳) $(۵ + ۵^{۲} + ۵^{۳} + ... + ۵^{۶۵}) + ۱۴^{۲۷} + ۱$ ۴) $۵۶^{۲۱۵} + ۱۹^{۶۱} + ۱۳^{۷}$

پاسخ: گزینه «۱» زیرا: گزینه ۲ عددی زوج است چون یکان $۵^{۴^{۳}}$ عدد ۵ و یکان $۲^{۷۵}$ عددی زوج است.گزینه ۳ هم عددی زوج است چون که یکان $(۵ + ۵^{۲} + ۵^{۳} + ... + ۵^{۶۵})$ عدد۵ و یکان $۱۴^{۲۷}$ عدد ۴ است که درنهایت اگر مجموع این اعداد را حساب کنیم رقم یکان صفر می شود که عددی مرکب است یعنی: $۵+۴+۱=۱۰$.گزینه ۴ هم عددی زوج است چون که یکان $۵۶^{۲۱۵}$ عدد ۶، یکان $۱۹^{۶۱}$ عدد ۹ و یکان $۱۳^{۷}$ عدد ۷ می باشد که اگر آنها را باهم جمع کنیم $۶ + ۹ + ۷ = ۲۲$ که عددی مرکب است.

نکته ۵: برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم عددی بر ۱۰ یکان آن عدد را محاسبه می کنیم.

مثال: باقی مانده تقسیم عدد $۲۶۹۷۳^{۳۰۱}$ بر عدد ۱۰ کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۲» زیرا: باقی مانده تقسیم عدد ۳۰۱ بر ۴ عدد ۱ است و $۳^{۱} = ۳$ یعنی رقم یکان این عدد ۳ است.

نکته ۶: اگر مجموع یا تفاضل دو عدد اول عددی فرد باشد، حتماً یکی از آن دو عدد، عدد ۲ است.

مثال: مجموع دو عدد اول ۱۰۳ است. بزرگترین آن دو عدد اول کدام است؟

۱) ۵۳ ۲) ۹۷ ۳) ۹۹ ۴) ۱۰۱

پاسخ: گزینه «۴» زیرا $۱۰۳ - ۲ = ۱۰۱$.

نکته ۷: اگر بهرام کاری را در m ساعت و شهرام همان کار را در n ساعت انجام دهد دو نفر با هم کار را در $\frac{۱}{T} = \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n}$ ساعت انجام می دهند.

مثال ۱: شیر آبی به تنهایی مخزنی را در ۲ ساعت و شیر آب دیگر همان مخزن را به تنهایی در ۴ ساعت پر می کند. اگر این دو شیر باهم باز باشند مخزن در چند دقیقه پر می شود؟

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینه «۲» زیرا:

$$\frac{۱}{T} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow T = \frac{۴}{۳} \text{ ساعت} \Rightarrow T = \frac{۴}{۳} \times ۶۰ = ۸۰ \text{ دقیقه}$$

مثال ۲: کارگری کاری را به تنهایی در ۱۰۸ ساعت و همان کار را به همراه کارگر دیگر در ۳۶ ساعت انجام می دهند. کارگر دیگر به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می دهد؟

۱) ۵۰　　۲) ۶۰　　۳) ۵۴　　۴) ۷۲

پاسخ: گزینه«۳»زیرا:

$$\frac{۱}{T}=\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}\Rightarrow\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۱۰۸}+\frac{۱}{n}\Rightarrow\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۳۶}-\frac{۱}{۱۰۸}=\frac{۲}{۱۰۸}=\frac{۱}{۵۴}\Rightarrow n=\frac{۵۴\times۱}{۱}=۵۴$$

نکته ۸: اگرازکل چیزی چند درصد متوالی A,B,C,..... کم شود درصدکاهش نهایی از رابطه ی زیر بدست می آید: $(\frac{A}{۱۰۰}+\frac{B}{۱۰۰}+\frac{C}{۱۰۰}+...)-(\frac{A}{۱۰۰}\times\frac{B}{۱۰۰}\times\frac{C}{۱۰۰}\times...)$

مثال: از یک طرف مربع ۱۰٪ و بعد از طرف دیگر باقی مانده ۳۰٪ دیگر را حذف کرده ایم.چند درصد از مساحت مربع باقی مانده است؟

۱) ۶۰　　۲) ۶۳　　۳) ۶۷　　۴) ۷۳

پاسخ: گزینه«۲» زیرا: درصد $۱۰۰-۳۷=۶۳\Rightarrow$ کاهش $(\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۱۰۰})-(\frac{۱۰}{۱۰۰}\times\frac{۳۰}{۱۰۰})=\frac{۴۰}{۱۰۰}-\frac{۳}{۱۰۰}=\frac{۳۷}{۱۰۰}$

نکته ۹: برای تعیین تعداد مقسوم علیه های یک عدد ابتدا آن عدد را به عوامل اول تجزیه نموده،سپس یک واحد به تمامی توان های عوامل اول اضافه نموده و آنها را در یکدیگر ضرب می کنیم. به عنوان نمونه اگر عدد A به صورت $A=a^x\times b^y\times c^z\times...$ تجزیه شده باشد تعداد مقسوم علیه ها به صورت زیر محاسبه می شوند: $(x+۱)\times(y+۱)\times(z+۱)\times...$

مثال: عدد $۴^۸\times۹^۵$ دارای چند مقسوم علیه طبیعی است؟

۱) ۱۸۷　　۲) ۱۸۰　　۳) ۱۸۵　　۴) ۱۸۶

پاسخ: گزینه«۱» زیرا: $۴^۸\times۹^۵=(۲^۲)^۸\times(۳^۲)^۵=۲^{۱۶}\times۳^{۱۰}$

تعداد مقسوم علیه ها $=(۱۶+۱)\times(۱۰+۱)=۱۷\times۱۱=۱۸۷$

نکته ۱۰: برای بدست آوردن حاصل ضرب مقسوم علیه های یک عدد ابتدا تعداد مقسوم علیه ها را بدست آورده و سپس عدد داده شده را به توان نصف تعداد مقسوم علیه ها می رسانیم.اگر تعداد مقسوم علیه های عدد A عدد x باشد حاصل ضرب مقسوم علیه های عدد A برابر است با: $A^{\frac{x}{۲}}$.

مثال: حاصل ضرب همه ی مقسوم علیه های طبیعی عدد ۴۲ کدام است؟

۱) $۶^۲ \times ۷^۲$ ۲) $۴۲^۴$ ۳) $۴۲^۳$ ۴) ۲۵۲

پاسخ: گزینه «۲» زیرا:عدد ۴۲ دارای ۸ مقسوم علیه است که در نتیجه حاصل ضرب مقسوم علیه های عدد ۴۲ برابر است با: $۴۲^{\frac{۸}{۲}} = ۴۲^۴$.

نکته ۱۱: برای بدست آوردن مجموع مقسوم علیه های یک عدد ابتدا عدد را به عوامل اول تجزیه نموده و سپس به کمک فرمول زیر مجموع مقسوم علیه ها را محاسبه می نماییم.فرض کنیم عدد A به صورت $A = a^x \times b^y \times c^z \times ...$ تجزیه شده باشد در آن صورت:

$$\text{مجموع مقسوم علیه ها} = \frac{a^{x+۱}-۱}{a-۱} \times \frac{b^{y+۱}-۱}{b-۱} \times \frac{c^{z+۱}-۱}{c-۱} \times ...$$

مثال:مجموع مقسوم علیه های عدد ۳۰ را بدست آورید؟

پاسخ: می دانیم $۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ بنابر این:

$$\text{مجموع مقسوم علیه ها} = \frac{۲^{۱+۱}-۱}{۲-۱} \times \frac{۳^{۱+۱}-۱}{۳-۱} \times \frac{۵^{۱+۱}-۱}{۵-۱} = ۷۲$$

تست های فصل اول

۱-مجموعه ی عامل های اول عدد ۲۶۰ کدام است؟

۱) {۵و۲و۱} ۲) {۵و۲} ۳) {۵و۱۳و۲و۱} ۴) {۵و۱۳و۲}

۲- عدد ۶۴×۱۵^{۸} به چند عدد اول بخش پذیر است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳- سمت راست عدد $۹^{۱۳۷۷}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

۴- تعداد مقسوم علیه های عدد $۴۹^{۷}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

۵- از عبارت های زیر کدام درست است؟

۱)تعداد اعداد اول کوچکتر از ۱۰،پنج تاست. ۲)عدد ۱ نه اول است و نه مرکب

۳)تعداد اعداد مرکب کوچکتر از ۱۰،پنج تاست. ۴)عدد طبیعی صفر نه مثبت است و نه منفی.

۶- ک.م.م دو عدد $۹a$ و $۱۲a$ مساوی ۱۸۰ است.عدد a برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۷-اگر مجموع یک عدد مرکب با یک عدد اول ۱۳ و حاصل ضرب آن ها ۴۲ باشد عدد مرکب کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۸-کدام عبارت زیر صحیح است؟

۱)تمام اعداد اول فرد هستند. ۲)مجموع دو عدد اول همیشه زوج است.

۳)اعداد مرکب حداقل سه مقسوم علیه دارند. ۴)تمام اعداد زوج مرکب اند.

۹- دوازده کارگر کاری را در ۱۵ روز انجام می دهند اگر بخواهیم کار ۲۰ روزه تمام شود به چند کارگر نیاز داریم؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۰- سه نفر برای انجام کاری ۸۰ روز وقت نیاز دارند پس از انجام $\frac{۳}{۴}$ کار،یک نفر به آنها اضافه شد تمام کار در چند روز انجام می شود؟

۱) ۷۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۱۱- ۳۵ دانش آموز برای یک اردوی تابستانی غذای ۱۲ روز خود را به همراه می برند اگر ۷ نفر دیگر به تعداد دانش آموزان اضافه شود غذای آن ها برای چند روز کفایت می کند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

۱۲- نقاشی یک ساختمان را ۱۲ نفر در ۲۰ روز انجام می دهند.نصف کار که انجام شد ۳ نفر به آنها اضافه شد.بقیه ی کار چند روزه تمام می شود؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

۱۳- اگر $\frac{a}{b}=\frac{۱}{۲}$ باشد نسبت $\frac{(a+b)^۲}{ab}$ چند است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴- اگر $\frac{۲x-۳y}{۲x+۳y}=\frac{۱}{۳}$ باشد $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

۱۵- در یک پادگان غذای ماهانه ۲۰۰ نفر را آماده کرده اند.پس از ۱۰ روز ۵۰ نفر به جمع آن ها اضافه می شود.غذای باقی مانده بعد از چند روز تمام خواهد شد؟(ماه را ۳۰ روز در نظر بگیرید.)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶

۱۶- حوضی دارای سه شیر آب است.اولی حوض را در ۵ ساعت،دومی در ۶ ساعت وهر سه با هم آن را در ۲ ساعت می توانند پر کنند.شیر سوم به تنهایی حوض را در چند ساعت می تواند پر کند؟

۱) ۷ ۲)۷/۵ ۳)۸ ۴)۹

پاسخ تشریحی تست های فصل اول

۱)گزینه«۴»

---

۲)گزینه«۳»: عدد ۱۵ عامل های اول ۳و۵ و عدد ۶۴ فقط عامل اول ۲ را دارد که در نهایت کل عدد دارای ۳ عامل اول است.

---

۳)گزینه ۱:عدد ۹ اگر به توان زوج برسد یکان آن ۱ و اگر به توان عددی فرد برسد یکان آن ۹ خواهد بود.

---

۴)گزینه ۳: مقسوم علیه $(۷^۲)^۷ = ۷^{۱۴} \Rightarrow ۱۴+۱=۱۵$

---

۵)گزینه ۲

---

۶)گزینه ۱: $\frac{۹a \times ۱۲a}{۹a \prod ۱۲a} = ۱۸۰ \Rightarrow \frac{۹a \times ۱۲a}{۳a} = ۱۸۰ \Rightarrow ۳۶a = ۱۸۰ \Rightarrow a = ۵$

---

۷) گزینه ۳:چون حاصل ضرب ۴۲ شده و یکی از اعداد مرکب و دیگری اول است و مجموع آن ها ۱۳ است پس اعداد ۶ و ۷ هستند که عدد مرکب ۶ است.

---

۸) گزینه ۳:عدد مرکب عددی طبیعی است که بیش از دو مقسوم علیه داشته باشد.

۹) گزینه ۲ :

$$۱۲\times۱۵=۲۰\times x\Rightarrow x=\frac{۱۲\times۱۵}{۲۰}=۹$$

---

۱۰) گزینه ۱ :

کارگران جدید $۳+۱=۴$ ، روز باقی مانده $\frac{۳}{۴}\times۸۰=۶۰\Rightarrow ۸۰-۶۰=۲۰$

کل کار $۳\times۲۰=۴\times x\Rightarrow x=۱۵$ روز $\rightarrow ۱۵+۶۰=۷۵$

---

۱۱) گزینه ۳ :

$$۳۵\times۱۲=۴۲\times x\Rightarrow x=۱۰$$

---

۱۲) گزینه ۲ :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{۲}\times۲۰=۱۰\\ ۱۲+۳=۱۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۱۰\times۱۲=۱۵\times x\Rightarrow x=\frac{۱۰\times۱۲}{۱۵}=۸$$

---

۱۳) گزینه ۳ :

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۲a\rightarrow\frac{(a+b)^۲}{ab}=\frac{(a+۲a)^۲}{a(۲a)}=\frac{(۳a)^۲}{۲a^۲}=\frac{۹a^۲}{۲a^۲}=\frac{۹}{۲}$$

---

۱۴) گزینه ۴ :

$$\frac{۲x-۳y}{۲x+۳y}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳(۲x-۳y)=۲x+۳y\Rightarrow ۶x-۹y=۲x+۳y$$

$$\Rightarrow ۶x-۲x=۹y+۳y\Rightarrow ۴x=۱۲y\Rightarrow x=۳y\Rightarrow\frac{x}{y}=۳$$

---

۱۵) گزینه ۵ :

$$\left.\begin{array}{r}۳۰-۱۰=۲۰\\ ۲۰۰+۵۰=۲۵۰\end{array}\right\}\Rightarrow ۲۰۰\times۲۰=۲۵۰\times x\Rightarrow x=۱۶$$

---

۱۶) گزینه ۲ :

$$\frac{۱}{T}=\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+\frac{۱}{C}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{C}\Rightarrow\frac{۱}{C}=\frac{۴}{۳۰}\Rightarrow C=۷/۵$$