فصل ۶

نکات طلایی عبارت های جبری و معادله

نکته ۱: به جمله هایی که قسمت حرفی آن ها عیناً مثل هم باشد جمله های متشابه گویند.(حروف و توان حروف یکی باشد.)

مثال: کدام جمله با جمله $۳a^۲b^۳$ متشابه است؟

۱) $۳a^۳b^۲$ ۲) $\frac{۳}{۲}a^۲b$ ۳) $-\frac{۷}{۳}a^۲b^۳$ ۴) $۳a^۲b^۲$

پاسخ گزینه (۳) زیرا حروف و توان آن ها عیناً مثل هم هستند.

نکته ۲: برای ساده کردن عبارت های جبری جملات متشابه را با یکدیگر ساده نموده و ساده شده ی جملات متشابه و غیر متشابه را کنار یکدیگر با علامت های خود می نویسیم.

مثال: حاصل عبارت $۴ab - ۴a^۲ - ۳b + a^۲ + b$ کدام است؟

۱) $-۳a^۲ + ۲ab$ ۲) $۳a^۲ + ۴ab - ۲b$

۳) $-۳a^۲ - ۴ab - ۲b$ ۴) $۴ab - ۳a^۲ - ۲b$

پاسخ : گزینه (۴).

نکته ۳: برای اینکه یک عبارت جبری را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری در آوریم مراحل زیر را انجام می دهیم: الف) ب.م.م ضرایب را بدست می

آوریم. ب)حروف مشترک باتوان کمتر را می نویسیم. ج) تک تک جمله ها را بر ب.م.م اعداد و حروف تقسیم نموده و داخل پرانتز می نویسیم. که به این عمل فاکتور گیری می گویند.

مثال: در عبارت $۱۲a^۲bc^۳ - ۱۶a^۲b^۲ = ...(۳c^۳ - ۴b)$ در جای خالی کدام جمله مناسب است؟

۱) $۴ab$ ۲) $۴a^۲b$ ۳) $a^۲b^۲$ ۴) $۴a^۲bc$

پاسخ گزینه (۲) زیرا حروف مشترک با توان کمتر عبارتند از $a^۲b$ و همچنین :

$$۱۲\prod ۱۶ = ۴$$

نکته ۴: برای هر دو عدد حقیقی a,b می توان نوشت:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \quad \text{و} \quad (a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

که به این عبارت ها در ریاضیات اتحاد می گویند و نام این اتحاد ،اتحاد مربع دو جمله ای است.

مثال: اگر $A = x + ۲$ و $B = x - ۲$ باشد حاصل عبارت $A^۲ - B^۲$ برابر است با:

۱) $۳(x+۱)$ ۲) $۲x^۲ + ۶x + ۳$ ۳) $۸x$ ۴) $۶x + ۳$

پاسخ: گزینه(۳) :

$$\begin{cases} A^۲ = (x+۲)^۲ = x^۲ + ۴x + ۴ \\ B^۲ = (x-۲)^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \end{cases} \Rightarrow A^۲ - B^۲ = x^۲ + ۴x + ۴ - x^۲ + ۴x - ۴ = ۸x$$

نکته ۵: هر گاه مجموع چند عبارت با توان های زوج مساوی صفر شود آن گاه تک تک عبارات مساوی صفر خواهند شد.یعنی: $x^{۲n} + y^{۲k} + z^{۲h} = ۰ \rightarrow x = ۰, y = ۰, z = ۰$

مثال: اگر $(a-۲b)^۲+(b-۲c)^۲=۰$ مقدار عبارت $\frac{(b+c-a)^۳}{abc}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) ۸ ۴) -۸

پاسخ : گزینه (۱)

$$\left.\begin{array}{l} a-۲b=۰\to a=۲b \\ b-۲c=۰\to b=۲c \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=۴c \\ b=۲c \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{(b+c-a)^۳}{abc}=\frac{(۲c+c-۴c)^۳}{۴c\times ۲c\times c}=\frac{(-c)^۳}{۸c^۳}=-\frac{۱}{۸}$$

نکته ۶: برای هر دو عدد حقیقی a,b می توان نوشت: $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$ که به این عبارت اتحاد مزدوج می گویند.

مثال: حاصل عبارت $(۱-x)(۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۴)(۱+x^۸)$ کدام است؟

۱) $۱-x^{۱۶}$ ۲) $۱+x^{۱۶}$ ۳) $x^{۱۶}-۱$ ۴) $x^{۱۲}-۱$

پاسخ: گزینه (۱):

$$=\overbrace{(۱-x)(۱+x)}^{۱-x^۲}(۱+x^۲)(۱+x^۴)(۱+x^۸)=\overbrace{(۱-x^۲)(۱+x^۲)}^{۱-x^۴}(۱+x^۴)(۱+x^۸)=$$
$$\overbrace{(۱-x^۴)(۱+x^۴)}^{۱-x^۸}(۱+x^۸)=(۱-x^۸)(۱+x^۸)=۱-x^{۱۶}$$

نکته ۷: تعداد جملات هر عبارتی که به صورت $(a+b)^n$ باشد برابر است با $n+۱$ جمله.

مثال: حاصل عبارت $(۳a-۲b)^۶$ چند جمله ای است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه (۲) بر اساس نکته فوق تعداد جملات عبارت است از: $۶+۱=۷$.

نکته ۸: برای بدست آوردن مجموع ضرایب هر عبارت کافی است به جای متغیرها عدد یک قرار دهیم.

مثال: مجموع ضرایب عبارت $(۳a-۲b)^۶$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۶^۶$ ۳) $۵^۶$ ۴) $(ab)^۶$

پاسخ: گزینه (۱) زیرا: $(۳\times۱-۲\times۱)^۶=۱^۶=۱$.

نکته ۹: درجه ی یک چند جمله ای نسبت به یک متغیر عبارت است از بزرگ ترین توان آن متغیر.

مثال: درجه چند جمله ای $(xy^۲+x^۷-y^۸)^۹+(x^۲y^۳+x^۸-y^۷)^۸$ نسبت به x کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۶۳ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینه (۴) زیرا داریم: $(x^۸)^۸=x^{۶۴}$ و $(x^۷)^۹=x^{۶۳}$ که توان ۶۴ بزرگ تر است.

نکته ۱۰: جواب معادله در خود معادله صدق می کند.یعنی با جایگزینی پاسخ ها می توان به جواب درست رسید.

مثال : از جمله جواب های معادله ی $x^۳-۳x^۲-x+۳=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

پاسخ: گزینه(۳)روش حل چنین معادلاتی را در دبیرستان خواهید خواند اما با جایگزینی جواب ها می توان به پاسخ درست دست یافت:

$$۱^۳-۳\times۱^۲-۱+۳=۱-۳-۱+۳=۰$$

نکته ۱۱: اگر ضرب چند عبارت مساوی صفر باشد آن گاه تک تک عبارات مساوی صفر خواهند شد. یعنی : $x \times y \times z = ۰ \rightarrow x = ۰$ یا $y = ۰$ یا $z = ۰$

مثال: جواب های معادله $x(x-۴)(x-۵) = ۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) همه ی موارد

پاسخ: گزینه (۴) زیرا: $\underline{x = ۰}, x - ۴ = ۰ \rightarrow \underline{x = ۴}, x - ۵ = ۰ \rightarrow \underline{x = ۵}$

نکته ۱۲: طرفین یک معادله را می توان در عددی ضرب و یا بر عددی مخالف صفر تقسیم نمود.هم چنین به طرفین یک معادله می توان عددی را افزود یا کم نمود.

مثال: جواب معادله ی $\frac{۲x-۳}{۴} - ۱ = \frac{x-۵}{۳}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه(۳) با ضرب طرفین معادله در عدد ۱۲ داریم:

$$۶x - ۹ - ۱۲ = ۴x - ۲۰ \rightarrow ۶x - ۴x = -۲۰ + ۲۱ \rightarrow ۲x = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

نکته ۱۳: در بعضی از معادلات مقسوم علیه های عدد ثابت آن جزء جواب های صحیح معادله هستند.

مثال: جواب های معادله $x^۲ + ۵x + ۶ = ۰$ کدام است؟

۱) ۴و۲ ۲) ۲- و۳- ۳) ۱ و۵ ۴) ۴- و ۳

پاسخ گزینه (۲) عدد ثابت ۶ است که مقسوم علیه های صحیح آن عبارتند از : $\{۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۶\}$. حل معادلات درجه دوم را در دبیرستان خواهید خواند.

نکته ۱۴: اگر داشته باشیم $x^n = a$:

الف) در صورتی که n عددی زوج و $a \geq ۰$ باشد می توان نتیجه گرفت:

$$x = \pm\sqrt[n]{a}$$

ب) در صورتی که n عددی فرد باشد می توان نتیجه گرفت: $x = \sqrt[n]{a}$

مثال: اگر داشته باشیم $x^۴ - ۱۶ = ۰$ کدام گزینه درست است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $x = -۲$ ۳) $x = ۴$ ۴) گزینه ۱و۲

پاسخ: گزینه (۴) زیرا : $x^۴ = ۱۶ \rightarrow x = \pm\sqrt[۴]{۱۶} = \pm\sqrt[۴]{۲^۴} = \pm ۲$.

تست های فصل ششم

۱- حاصل عبارت $2(a-b)+(b-a)\times 2$ برابر است با:

۱) $4a$ ۲) $4b$ ۳) صفر ۴) ۲

۲- ساده شده ی عبارت جبری مقابل کدام است؟ $x+2x+3x+...+9x+10x$

۱) $110x$ ۲) $55x$ ۳) $220x$ ۴) $165x$

۳- حاصل عبارت $(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۴- اگراندازه ی قطر مربعی $a+b$ باشد مساحت مربع برابر است با:

۱) a^2+b^2 ۲) $\frac{1}{2}(a+b)^2$ ۳) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ ۴) $(a+b)^2$

۵- مقدار عددی عبارت $-\frac{1}{a^{-2}}$ به ازای $a=-\frac{1}{4}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) -16 ۳) ۱۶ ۴) $-\frac{1}{16}$

۶- مجموع ضرایب بسط $(2x^2+x-2)^{99}+(2x^3-x-1)+3$ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۷- اگر داشته باشیم $a=\frac{b}{2}=3$ مقدار $a+b$ برابر است با:

۱) ۹ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۶ ۴) ۵

۸- اگر $x+\frac{1}{x}=a$ مقدار $x^2+\frac{1}{x^2}$ چه قدر است؟

۱) a^2+2 ۲) a^2-2 ۳) a^2-1 ۴) a^2+1

۹- مجموع دو عدد ۱۰ و حاصل ضرب آن ها ۲۰ می باشد مجموع معکوس های آن دو عدد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰- اگر دانش آموزان کلاس را در ۴ ردیف بنشانیم برای ۲ دانش آموز دیگر باید جا تهیه کنیم و اگر آن ها را در ۳ ردیف بنشانیم برای ۹ دانش آموز دیگر باید جا تهیه کنیم تعداد دانش آموزان کلاس چند نفر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۷

۱۱- دو شمع به طول های مساوی را در یک لحظه روشن می کنیم،شمع اول در ۴ ساعت و شمع دوم در ۳ ساعت می سوزد.پس از گذشت چند ساعت طول شمع اول دو برابر طول شمع دوم می شود؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۱۲- در تساوی $۲^{x+y-۱} = ۳^{x+۱}$ حاصل xy کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱

۱۳- اگر $۶x - ۵ = ۱$ باشد مقدار عبارت $x^۲ - ۱$ کدام گزینه است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴- پدر رضا $\frac{۳}{۵}$ پولش را به رضا و $\frac{۲}{۵}$ مقداری را که به رضا داده بود به پسر دیگرش داد و ۸۰۰ تومان برایش باقی ماند.پدر رضا چند تومان پول داشته است؟

۱) ۶۵۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۵۵۰۰ ۴) ۶۰۰۰

۱۵- اگر $(x-۵)^۶ + (y+۲x-۱)^۴ = ۰$ باشد مقدار y چه قدر است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳- ۴) ۹-

پاسخ تشریحی تست های فصل ششم

۱- گزینه (۳) : $۲a - ۲b + ۲b - ۲a = ۰$

۲- گزینه (۲) :حاصل جمع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰ را بدست می آوریم.

$$\frac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{n=۱۰} \frac{۱۰\times ۱۱}{۲} = ۵۵$$

۳- گزینه (۳) با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای می توان نوشت:

$$(\sqrt{۸}+\sqrt{۲})^۲ = \sqrt{۸}^۲ + ۲\sqrt{۱۶} + \sqrt{۲}^۲ = ۸+۸+۲ = ۱۸$$

۴- گزینه (۲) :

مساحت مربع یا لوزی $= \frac{۱}{۲} \times$ حاصل ضرب دو قطر $= \frac{۱}{۲}(a+b)(a+b) = \frac{۱}{۲}(a+b)^۲$

۵- گزینه (۴) : $-\frac{۱}{a^{-۲}} = -a^۲ = -(-\frac{۱}{۴})^۲ = -\frac{۱}{۱۶}$

۶- گزینه (۱) برای بدست آوردن مجموع ضرایب به جای متغیر عدد یک قرار می دهیم. $(۲(۱)^۲ + ۱ - ۲)^{۹۹} + (۲(۱)^۳ - ۱ - ۱) + ۳ = ۱ + ۰ + ۳ = ۴$

۷- گزینه (۱) : $a = ۳ \ , \ b = ۲\times ۳ = ۶ \rightarrow a+b = ۳+۶ = ۹$

۸- گزینه (۲) : طرفین رابطه ی $x + \frac{۱}{x} = a$ را به توان ۲ می رسانیم بنابراین:

$$(x+\frac{۱}{x})^۲ = a^۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x(\frac{۱}{x}) + \frac{۱}{x^۲} = a^۲ \rightarrow x^۲ + ۲ + \frac{۱}{x^۲} = a^۲ \rightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = a^۲ - ۲$$

۹- گزینه (۴) :

$$\left.\begin{array}{r} a+b=۱۰ \\ ab=۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{۱۰}{۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

۱۰- گزینه (۱) : تعداد دانش آموزان هر ردیف را x فرض می کنیم:

$۴x+۲=۳x+۹ \rightarrow x=۷ \rightarrow$ تعداد کل دانش آموزان $=۴\times۷+۲=۳۰$

۱۱- گزینه (۴) : بعد از x ساعت $\frac{x}{۴}$ شمع اول می سوزد و $۱-\frac{x}{۴}$ باقی می ماند و شمع دوم $\frac{x}{۳}$ می سوزد و $۱-\frac{x}{۳}$ باقی می ماند بنابراین :

$$۱-\frac{x}{۴}=۲(۱-\frac{x}{۳}) \rightarrow \frac{۴-x}{۴}=\frac{۶-۲x}{۳} \rightarrow ۱۲-۳x=۲۴-۸x \rightarrow x=\frac{۱۲}{۵}$$

۱۲- گزینه (۳) : شرط اینکه تساوی برقرار باشد آن است که توان ها صفر باشند.

$$\begin{cases} x+۱=۰ \\ x+y-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ -۱+y-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ y=۲ \end{cases} \Rightarrow xy=-۱\times۲=-۲$$

۱۳- گزینه (۳) $\quad ۶x-۵=۱ \rightarrow ۶x=۶ \rightarrow x=۱ \rightarrow x^۲-۱=۱^۲-۱=۰$

۱۴- گزینه (۲) : همه ی پول پدر رضا را x فرض می کنیم بنابراین:

$$\frac{۳}{۵}x+\frac{۲}{۵}(\frac{۳}{۵}x)+۸۰۰=x \rightarrow x=۵۰۰۰$$

۱۵- گزینه (۴) چون توان ها زوج هستند پس:

$$x-۵=۰ \rightarrow x=۵ \quad , \quad y+۲\times۵-۱=۰ \rightarrow y=-۹$$