

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۴ / ۴ / ۱۳۹۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	سؤالات	نمره	

۱	اشتراک دو بازه ی $(0, 8)$ و $(-3, 6)$ را به صورت یک همسایگی متقارن بنویسید. سپس مرکز و شعاع آن را تعیین کنید.	۱
۲	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -2$ ب) برای هر عدد حقیقی a ، یک عدد طبیعی n وجود دارد که $n > a$. ج) بازه ی $[2, 2]$ برابر است با مجموعه ی $\{2\}$. د) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، فاصله ی a تا b برابر است با $ a - b $.	۱
۳	با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید:	۱
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$	
۴	الف) ثابت کنید دنباله ی کران دار، هم کران بالا دارد و هم کران پایین. ب) با یک مثال نشان دهید که دنباله ی کران دار ممکن است همگرا نباشد.	۱/۵
۵	با ذکر دلیل، همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی، مقدار سری را بیابید.	۳
	الف) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5k+3}{2k-1}$ ب) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ ج) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}}$	
۶	با استفاده از دنباله ها، ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{ x }{x}$ در نقطه ی صفر حد ندارد.	۱/۲۵
۷	بدون استفاده از هم ارزی و قاعده ی هوییتال، حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید.	۱/۷۵
	الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{ x - 1 }$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 4x - 1})$	
۸	در تابع زیر، مقدار a را طوری بیابید که تابع در \mathbb{R} پیوسته باشد.	۱
	$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$	
۹	فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $L > 0$ باشد. ثابت کنید که f در یک همسایگی محذوف a مثبت است.	۱
۱۰	نشان دهید معادله ی $x^2 - 2x + (x-1)(x+1)(x-3) = 0$ در بازه ی $[-2, 2]$ حداقل دو ریشه دارد.	۱/۷۵
۱۱	معادله ی مجانب های تابع $y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}$ را بنویسید.	۱/۷۵
۱۲	مشتق پذیری تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ را در نقطه ی $x = 1$ بررسی کنید.	۱/۵
۱۳	اگر تابع f روی \mathbb{R} مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\left(f\left(\frac{1}{x}\right) \right)'$ را در $x = \frac{1}{2}$ به دست آورید.	۱
۱۴	مختصات نقاطی روی منحنی تابع $y = \frac{x}{x+1}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط، بر خط به معادله ی $y = -4x + 1$ عمود باشد.	۱/۵
۲۰	جمع نمره	موفق باشید.

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۴/۴	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹	
ردیف	راهنمای تصحیح	
نمره		

۱	$(0,8) \cap (-3,6) = (0,6)$ (۰/۵) $\Rightarrow a = \frac{0+6}{2} = 3$ (۰/۲۵) , $r = \frac{6-0}{2} = 3$ (۰/۲۵)	۱
۱	(الف) نادرست (۰/۲۵) (ب) درست (۰/۲۵) (ج) درست (۰/۲۵) (د) درست (۰/۲۵)	۲
۱	$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, (\forall n \geq M, \underbrace{ \frac{n^r}{2n^r-1} - \frac{1}{2} }_{(./۲۵)} < \varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{2(2n^r-1)} < \varepsilon$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n > \sqrt{\frac{2\varepsilon+1}{4\varepsilon}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow M \geq \left\lceil \sqrt{\frac{2\varepsilon+1}{4\varepsilon}} \right\rceil + 1$ (۰/۲۵)	۳
۱/۵	(الف) دنباله $\{a_n\}$ کراندار است اگر و تنها اگر $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq K$, $\exists K > 0$ (۰/۲۵). بنابراین $\forall n \in \mathbb{N}, -K \leq a_n \leq K$ (۰/۲۵) (ب) دنباله $\{(-1)^n\}$ کراندار است (۰/۲۵) ولی دنباله ای نوسانی است. پس واگراست. (۰/۲۵)	۴
۳	(الف) سری واگراست. (۰/۲۵) \Rightarrow (۰/۲۵) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\delta k + 3}{2k-1} = \frac{\delta}{2} \neq 0$ (۰/۲۵) (ب) $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) (ج) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ (۰/۲۵)	۵
۱/۲۵	$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \\ b_n = -\frac{1}{n} \end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} a_n, b_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 1$ (۰/۲۵) , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = -1$ (۰/۲۵) چون دو دنباله $\{f(b_n)\}, \{f(a_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرايند، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد. (۰/۲۵)	۶
۱/۷۵	(الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^r+x+1)}{-(x-1)} = -3$ (۰/۲۵) (ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^r+4x-10} \right) \times \frac{x - \sqrt{x^r+4x-10}}{x - \sqrt{x^r+4x-10}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x+10}{x - \sqrt{x^r+4x-10}}$ (۰/۲۵) $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x - x } = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{2x} = -2$ (۰/۲۵)	۷

ادامه در برگه ی دوم

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۴ / ۴	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \times \frac{x^2}{4}} = 2 \quad (./25) \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)} a = 2 \quad (./25)$	۸
۱	<p>برای هر $\varepsilon > 0$ طبق فرض $\varepsilon > 0$ فرض $\varepsilon = L > 0$ حال با فرض $\varepsilon > 0$ داریم $\exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x-a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$ $(./25)$</p> <p>$\exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x-a < \delta \Rightarrow \underbrace{ f(x) - L < L}_{(./25)} \Rightarrow 0 < f(x) < 2L \quad (./25)$</p>	۹
۱/۲۵	<p>f همواره پیوسته است $(./25)$.</p> $\left. \begin{array}{l} f(-2) = -7 \quad (./25) \\ f(0) = 3 \quad (./25) \end{array} \right\} \Rightarrow f(-2)f(0) < 0 \xrightarrow{\text{قضیه ی مقدار میانی}} \exists x_1 \in (-2, 0), f(x_1) = 0 \quad (./25)$ $\left. \begin{array}{l} f(2) = -3 \quad (./25) \\ f(0) = 3 \quad (./25) \end{array} \right\} \Rightarrow f(2)f(0) < 0 \xrightarrow{\text{قضیه ی مقدار میانی}} \exists x_2 \in (0, 2), f(x_2) = 0 \quad (./25)$	۱۰
۱/۲۵	<p>مجانبهای قائم $(./5)$ $\Rightarrow z = 2, x = 1$</p> $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -2 \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right. \Rightarrow z = 2, x = 1 \quad (./5)$ $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1 \quad (./25)$ $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 2x}{x^2 + 2x - 2} = -1 \quad (./25) \Rightarrow y = x - 1 \quad (./25)$	۱۱
۱/۵	$\left. \begin{array}{l} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)[x] - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1) \times 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \quad (./25) \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1) \times 0}{x-1} = 0 \quad (./25) \end{array} \right\} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \quad (./25)$ <p>مشتق پذیر نیست</p>	۱۲
۱	$f'(2) = \frac{3}{2} \quad (./25), \therefore \left(f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \left(f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \Big _{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \times \frac{3}{2} = -6 \quad (./25)$	۱۳
۱/۵	$y' = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (./25) \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 1, x = -3 \quad (./5) \Rightarrow \left(1, \frac{1}{4}\right), \left(-3, \frac{3}{4}\right) \quad (./5)$	۱۴
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	