

## مجموعه مسایل اتحاد و تجزیه

۱. حاصل عملیات زیر را با استفاده از اتحادها بدست آورید.

۱.  $(1 + x\sqrt{3} + x^2)(1 - x\sqrt{3} + x^2)$
۲.  $(x^2 + x^2 + 1)(x^2 - x^2 + 1)$
۳.  $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)$
۴.  $(a+b+c)^2$
۵.  $(a+b+c+d)^2$
۶.  $(a^2 + b^2\sqrt{2})^2 - (a^2 - b^2\sqrt{2})^2$
۷.  $(2a + b\sqrt{5})^2 + (2a - b\sqrt{5})^2$
۸.  $(3a\sqrt{3} + 2b\sqrt{2})^2 - (3a\sqrt{3} - 2b\sqrt{2})^2$
۹.  $(a - b\sqrt{3})(a^2 + a^2b\sqrt{3} + 3ab^2 + 3b^2\sqrt{3})$
۱۰.  $(1 + 2x)^2$
۱۱.  $(x - 2)^2$
۱۲.  $(4 + 9x^2)(9a^2 + 4b^2) - (4b - 9ax)^2$
۱۳.  $(x^2 - 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$
۱۴.  $(x^2 + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$

$$۱۵. (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$$

$$۱۶. (x^r + (r + \sqrt{r})x + 1 + \sqrt{r})(x^r + (r - \sqrt{r})x + 1 - \sqrt{r})$$

$$۱۷. (x^r - (a + \sqrt{b})x + 1)(x^r - (a - \sqrt{b})x + 1)$$

$$۱۸. (x^r + x\sqrt{r+1} + 1)(x^r + x\sqrt{r-1} + 1)(x^r - x\sqrt{r-1} + 1)(x^r - x\sqrt{r+1} + 1)$$

$$۱۹. (a - \sqrt{rb})^r$$

$$۲۰. (1 - \sqrt{r}x^r)(1 + \sqrt{r}x^r + rx^{2r} + \dots + r^{r-1}\sqrt{r}x^{r^2})$$

$$۲۱. (x^r + r\sqrt{r}y^r)^r - (x^r - r\sqrt{r}y^r)^r$$

۲. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$۱. (a+b)^r - (a-b)^r = r a^r (a^r + r b^r) + r b^r (r a^r + b^r)$$

$$۲. (a+b)^r - (a-b)^r = r ab (a^r + b^r)$$

$$۳. ((a^r - x^r)(b^r - y^r) + r abxy)^r + r (by(a^r - x^r) - ax(b^r - y^r))^r = (a^r + x^r)(b^r + y^r)^r$$

$$۴. (a+b)(a+rb)(a+r^2b)(a+r^3b) + b^r = (a^r + r ab + r^2 b^2 + r^3 b^3)^r$$

$$۵. (a-b)^r + (b-c)^r + (c-a)^r = r((a-b)(a-c) + (c-a)(c-b) + (b-c)(b-a))$$

$$۶. \frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$$

۳. سه جمله ای  $P(x) = x^r + x + 1$  مفروض است.  $p$  و  $k$  را چنان بیابید که:

$$P(x-p) + P(x+p) = kP(x) + p$$

۴. ثابت کنید عبارت زیر متحد با صفر است.

$$P(x) = (x-a)^r(b-c) + (x-b)^r(c-a) + (x-c)^r(a-b) + (a-b)(b-c)(c-a)$$

۵. با فرض  $a+b+c=0$  ثابت کنید:

۱.  $a^r + b^r + c^r = rabc$

۲.  $a^r + b^r + c^r + r(a+b)(c+b)(a+c) = 0$

۳.  $a^r + b^r + c^r = r(a^r b^r + c^r b^r + a^r c^r) = r(ab+bc+ca)^r$

۴.  $r(a^\delta + b^\delta + c^\delta) = \delta abc(a^r + b^r + c^r)$

۵.  $r(a^\delta + b^\delta + c^\delta) = \delta(a^r + b^r + c^r)(a^r + b^r + c^r)$

۶. درستی برابری های زیر را بررسی کنید:

۱.  $(1+x)(1+x^r)(1+x^{r^2}) \dots (1+x^{r^{n-1}}) = 1+x+x^r+\dots+x^{r^{n-1}}$

۲.  $\frac{a^r(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^r(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^r(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^r$

۷. روابط زیر را اثبات نمایید:

۱.  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^r} + \frac{4}{1+x^{r^2}} + \frac{8}{1+x^{r^4}} + \frac{16}{1+x^{r^8}} = \frac{32}{1-x^{32}}$

۲.  $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$

۳.  $a^r(b-c) + b^r(c-a) + c^r(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c)$

۴.  $\frac{a^r}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^r}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^r}{(c-a)(c-b)} = 1$

۸. ثابت کنید اگر  $a+b+c=0$ ، آنگاه داریم:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{c}{a-b} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$$

۹. درستی عبارت زیر را با استفاده از اتحاد اول بررسی کنید.

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{r}} + y^{\frac{1}{r}}}{(x+y)^{\frac{1}{r}}} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{r}}}{x^{\frac{1}{r}} + y^{\frac{1}{r}}}\right]^{-r} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} = \frac{(x+y)^r}{4xy}$$

۱۰. درستی عبارت زیر را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر بررسی کنید.

$$\frac{a^{\frac{r}{2}} - \sqrt[2r]{a^r b}}{a^{\frac{r}{2}} + \sqrt[2r]{ab} + \sqrt[2r]{b^r}} : \left(1 - \sqrt[2r]{\frac{b}{a}}\right) - a^{\frac{r}{2}} = 0$$

۱۱. تجزیه کنید.

۱.  $bc(b+c) + ac(c-a) - ba(b+a)$

۲.  $a^r b^r (b-a) + a^r c^r (a-c) + b^r c^r (c-b)$

۳.  $\left((x^r + y^r)(a^r + b^r) + \sqrt[2r]{abxy}\right)^r - \left(ab(x^r + y^r) + xy(a^r + b^r)\right)^r$

۴.  $x^r + 5x^r + 3x - 9$

۵.  $x^r + 9x^r + 11x - 11$

۶.  $(b-c)^r + (c-a)^r + (a-b)^r$

۷.  $(x^r + y^r)^r + (z^r - x^r)^r - (z^r + y^r)^r$

۱۲. ثابت کنید اگر به حاصل ضرب چهار عدد درست متوالی یک واحد اضافه کنیم، مجذور یک عدد درست بدست می آید.

۱۳. ثابت کنید عدد  $1 - 13^{2n}$  بر ۱۶۸ بخش پذیر است.

۱۴. ثابت کنید عدد  $7^{21} - 478$  بر ۲۸۸ بخش پذیر است.

۱۵. اگر  $a, b, c$  اعداد حقیقی باشند و داشته باشیم:

$$(a-b)^r + (c-a)^r + (b-c)^r = (a+b-2c)^r + (b+c-2a)^r + (c+a-2b)^r$$

آنگاه  $a=b=c$ .

۱۶. ثابت کنید حاصل ضرب  $(x^m - 1)(x^{m-1} - 1)(x^{m+1} - 1)$ ، بر عبارت داده شده، بخش پذیر است.  $m$  عددی صحیح و مثبت است.

$$(x-1)(x^r - 1)(x^r - 1)$$

۱۷. ثابت کنید عدد  $4^{2n} - 3^{2n} + 2^{2n} - 1$  به ازای هر عدد طبیعی  $n$  بر ۷ بخش پذیر است.

۱۸. ثابت کنید  $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$  بر ۱۶ بخش پذیر است.

۱۹. ثابت کنید  $n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 62n$  بر ۲۴ بخش پذیر است.

۲۰. معادلهٔ مقابل را حل کنید:

$$(2-3x)^r + (2x-1)^r + (x-1)^r = 0.$$

۲۱. عبارت  $A = (x-y)^r + (z-x)^r + (y-z)^r$  را تجزیه کنید.

۲۲.  $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$  را به حاصل ضرب دو عامل صوری تجزیه کنید که مجموع آنها  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  باشد.

$$\frac{A}{\sqrt[m]{B \pm \sqrt{C}}} = \frac{A \sqrt[m]{B \pm \sqrt{C}} \times \sqrt[m]{(B^r - C)^{m-1}}}{B^r - C} \quad \text{ثابت کنید: } ۲۳$$

۲۴. ثابت کنید:

$$۱. \frac{\frac{a - 2b}{\sqrt[3]{a^2 - 2b^2}} + \frac{\sqrt[3]{2a^2b} - \sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{2b^2} + \sqrt[3]{2ab}}}{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{2b} + b\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{2b}} = 1$$

$$۲. \left( \sqrt[3]{\frac{a^3 + 2a^2b + 2ab^2}{a^2 - 2ab + 2b^2}} + \sqrt[3]{2b^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^{-3}} \right) : \left( \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} - b\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{b} \sqrt{a^3 - 2b^3}$$

$$۳. \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{1 - \sqrt{5} + \sqrt{x}} \right) \left( x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) \sqrt{0.2} = 1$$

$$۴. \left( \sqrt[2]{\frac{1}{a} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{b}} + \frac{\sqrt[3]{9 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{b}} \right)^{-2}} \right) : \left( 1 + \frac{b}{2a} - \sqrt[2]{\left(\frac{2a}{b}\right)^{-1}} \right) = 1$$

۲۵. ثابت کنید از تساوی های زیر:

$$\begin{cases} bx + ay - dz + ct = 0 \\ ax - by - cz - dt = 0 \\ dx - cy + bz + at = 0 \\ cx + dy + az - bt = 0 \end{cases}$$

نتیجه می شود:  $a=b=c=d=0$  یا  $x=y=z=t=0$ .

$$۲۶. \text{ ثابت کنید، اگر } \begin{cases} x = q^3 + 3pq^2 - p^3 \\ y = -3pq(p+q) \\ z = p^3 + pq + q^3 \end{cases} \text{ آنگاه } x^2 + xy + y^2 = z^3$$

$$۲۷. \text{ ثابت کنید، اگر } a+b+c=0 \text{ آنگاه: } (a^3 + b^3 + c^3) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

۲۸. ثابت کنید:

$$\left( (a-b)^r + (c-a)^r + (b-c)^r \right)^r = r \left( (a-b)^r + (c-a)^r + (b-c)^r \right)$$

۲۹. ثابت کنید، اگر  $xy + xz + yz = 1$  آنگاه:

$$\frac{x}{1-x^r} + \frac{y}{1-y^r} + \frac{z}{1-z^r} = \frac{rxyz}{(1-x^r)(1-y^r)(1-z^r)}$$

۳۰. ثابت کنید مجموع سه کسر  $\frac{a-b}{1+ab}$  و  $\frac{c-a}{1+ac}$  و  $\frac{b-c}{1+bc}$  مساوی با حاصل ضرب آنهاست.

۳۱. تجزیه کنید.

۱.  $(2x+5)(3x^2-14)-2x^2-5x$
۲.  $(x-y)^r - r(xz+yt-xt-yz) + (z-t)^r$
۳.  $(x+1)^r + (y-1)^r$
۴.  $x^r + 7y - y^r - 7x$
۵.  $27x^r - 57x^2 + 38x - 8$
۶.  $(x+1)^r - (2x-3)^r$
۷.  $(6x-5)^r - (4x-7)^r - (2x-2)^r - 64$
۸.  $x^r + 7x^2 + 10x + 4$
۹.  $x^r - 4x^r - 19x^2 + 106x - 120$
۱۰.  $(x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3 + \dots + (x+y)^r$
۱۱.  $(a+b)^r + (a-b)^r + (a^r - b^r)^r$
۱۲.  $3x^r - 10x^2y^2 + 3y^r$
۱۳.  $bc(b+c) + ac(c+a) + ba(b+a) + 2abc$
۱۴.  $(x+2)^r + (2-x)^r$
۱۵.  $(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x - 18) - 27$
۱۶.  $(x-2)(x+2)(x+3)(x+7) + 36$
۱۷.  $-2x^r - (a+1)x^r + 2(a+4)x + (a+1)(a+4)$
۱۸.  $11x^r + 2y^r - 14xy - 2x - 2y - 1$
۱۹.  $x^r - 3x^2 + 3x - 6$
۲۰.  $x^r - 16x^r + 96x^2 - 256x + 256$
۲۱.  $x^r + 2x \cos^r(y) + \cos(2y)$
۲۲.  $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) - 5$
۲۳.  $x^r + 4x^r - 12x^2 - 32x + 64$
۲۴.  $(a+b+c)^2 - a^2 - (b+c)^2$
۲۵.  $2x^r - 13x^r + 24x^2 - 13x + 2$

$$۲۶. (۳x^۲ + ۱۱y^۲ - ۳۰xy)^۲ - ۲۵۶y(y-x)^۲$$

$$۲۷. x^۲y^۲ - xy(y+۳x-۱) - y(۲y-۱) + x(۲x-۱)$$

$$۲۸. (b-c)(b+c-۲a)^۲ + (c-a)(c+a-۲b)^۲ \\ + (a-b)(a+b-۲c)^۲$$

$$۲۹. x(x^۲ + y^۲)^۲ - ay(x+y)(x^۲ + y^۲) + a^۲y^۲$$

$$۳۰. ((a^۲ - x^۲)(b^۲ - y^۲) + ۴abxy)^۲ + ۴(by(a^۲ - x^۲) - ax(b^۲ - y^۲))^۲$$

۳۱. ثابت کنید چند جمله ای از نوع  $P(x) = ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ - bx + a$  را می توان بر حسب

$x - \frac{1}{x}$  مرتب و از این راه آن را تجزیه نمود.