

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰:۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۱۰ / ۱۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید: الف) توان سوم هر عدد حقیقی از توان دوم همان عدد بزرگتر است. ب) حاصلضرب هر دو عدد گویا همیشه عددی گویا است. ج) اگر $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ و $y = 0$.	۲
۲	با استدلال استقراء ریاضی برای هر عدد طبیعی n ، درستی رابطه زیر را ثابت کنید. $\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$	۱
۳	با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{7}$ عدد گنگ و x عدد گویا است آنگاه $x + \sqrt{7}$ عددی گنگ است.	۰/۷۵
۴	۱۰ نقطه را درون مربعی به ضلع واحد انتخاب می کنیم، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه از آن ها کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.	۱
۵	اگر x و y دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است. $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$	۰/۷۵
۶	ثابت کنید مجموعه تهی زیر مجموعه تمامی مجموعه ها است.	۰/۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، درستی رابطه زیر را ثابت کنید. $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$	۱/۵
۸	اگر $A_i = [-i, 4-i]$ مطلوبست محاسبه: الف) $\bigcap_{i=1}^4 A_i$ و ب) $\bigcup_{i=1}^4 A_i$	۰/۵
۹	اعضای دو مجموعه A, B را مشخص کرده و سپس اعضای $B \times A$ را محاسبه کنید. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 15\} \quad \text{و} \quad B = \{3^k \mid k \leq 1, k \in \mathbb{Z}\}$	۱/۵
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

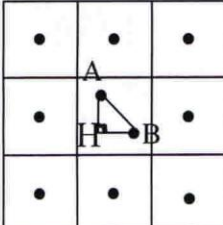
سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰:۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۱۰ / ۱۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	رابطه ی R در R^2 به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^2 + 5y = z^2 + 5t$ الف) ثابت کنید R یک رابطه ی هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
۱۱	اگر A, B, C ، سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، برای قسمت های الف و ب ابتدا یک عبارت مجموعه ای نوشته و سپس نمودار ون هر یک را رسم کنید. الف) فقط پیشامد B رخ دهد. ب) هر سه پیشامد با هم رخ دهند.	۱
۱۲	تاس و سکه سالمی را با هم پرتاب می کنیم، مطلوبست: الف) پیشامد A آن که سکه رو یا تاس ۴ باشد. ب) پیشامد B آن که سکه رو و تاس ۴ باشد.	۱
۱۳	در فضای نمونه ای $S = \{a, b\}$ اگر $\frac{p(a)}{p(b)} = \frac{1}{7}$ مطلوبست محاسبه: $A = 3p(a) + \frac{1}{2} p(b)$	۱/۵
۱۴	۴ نفر را به تصادف انتخاب می کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال آن که روز تولد هیچ دو نفری از آن ها در یک روز هفته نباشد.	۱/۵
۱۵	در خانواده های ۵ فرزندی، مطلوبست محاسبه احتمال آن که ۲ فرزند پسر داشته باشند.	۱
۱۶	یک نقطه بطور تصادفی درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می کنیم، مطلوبست احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.	۱/۵
۱۷	اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است: $P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$	۱/۵
	جمع نمره	۲۰

« موفق باشید »

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰:۳۰ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۱۰ / ۱۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۸۹	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	<p>الف) نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود، مثل $x=1$ (۰/۲۵)</p> <p>فرض $x = \frac{a}{b} \in Q$, $y = \frac{c}{d} \in Q$</p> <p>حکم $xy = \frac{p}{q} \in Q$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) درست (۰/۲۵) و آن را اثبات می کنیم:</p> $xy = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{p}{q} \quad (۰/۲۵)$ <p>چون d, c, b, a همگی عدد صحیح هستند و اعداد صحیح نسبت به جمع و ضرب و تفریق بسته هستند پس q, p هم عدد صحیح بوده و همچنین $b \neq 0$ و $d \neq 0$ پس $bd = q \neq 0$ پس $\frac{p}{q} \in Q$ (۰/۲۵)</p> <p>ج) نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود، مثل $xy = 0 \Leftrightarrow x=0$, $y=0$ (۰/۲۵)</p>	۲
۲	<p>$p(1) = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (۰/۲۵)</p> <p>$p(k) = \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^k} = 1 - \frac{1}{3^k}$ فرض استقراء (۰/۲۵)</p> <p>$p(k+1) = \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3^{k+1}}$ حکم استقراء (۰/۲۵)</p> <p>$p(k+1) = 1 - \frac{1}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} = 1 + \frac{-3+2}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3^{k+1}}$ (۰/۲۵)</p>	۲
۰/۷۵	<p>فرض $\sqrt{y} \in Q'$, $x \in Q$ (۰/۲۵)</p> <p>حکم $x + \sqrt{y} \in Q'$</p> <p>خلاف حکم $x + \sqrt{y} = \frac{a}{b} \in Q \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{a}{b} - x \Rightarrow$ (۰/۲۵)</p> <p>تفریق دو گویا، گویا است و مساوی گنگ نمی شود پس به تناقض رسیده یعنی حکم برقرار است. (۰/۲۵)</p>	۳
۱	 <p>بر طبق اصل لانه کبوتر، ۱۰ نقطه = تعداد کبوترها و ۹ مربع = تعداد لانه ها $10 > 9$ پس حداقل ۲ نقطه درون یک مربع قرار دارند. (۰/۲۵)</p> <p>$AB^2 = AH^2 + BH^2 < \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (۰/۲۵)</p>	۴
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

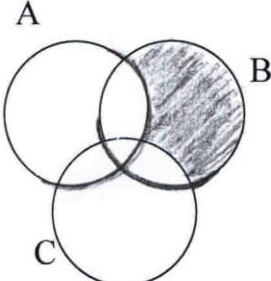
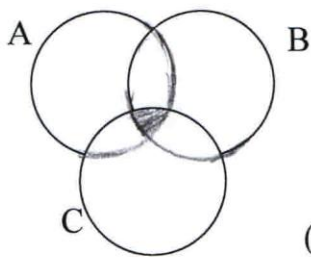
ساعت شروع: ۱۰:۳۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۱۰ / ۱۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۸۹	

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۰/۷۵	$xy \leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ <p>گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی درست است. (۰/۲۵)</p>	۵
۰/۵	مجموعه دلخواه را A در نظر بگیریم به برهان خلف $\phi \subset A$ (۰/۲۵) پس باید ϕ عضوی داشته باشد که در A نیست و این تناقض با تعریف تهی را دارد. (۰/۲۵)	۶
۱/۵	$(A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$ <p>(۰/۲۵) (۰/۲۵)</p> $= (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B-A) = A \cap (B' \cup B) \cup (B-A) = (۰/۲۵)$ <p>(۰/۲۵) $A \cap U$</p> $A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = A \cup B \quad (۰/۲۵)$ <p>(۰/۲۵)</p>	۷
۰/۵	الف) $\bigcap_{i=1}^4 A_i = [-1, 0]$ (۰/۲۵) ب) $\bigcup_{i=1}^4 A_i = [-4, 3]$ (۰/۲۵)	۸
۱/۵	$A = \{1, 2, 3\} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad B = \left\{ \frac{1}{3}, 1, 3 \right\} \quad (۰/۵)$ $B \times A = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1 \right), \left(\frac{1}{3}, 2 \right), \left(\frac{1}{3}, 3 \right), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \right\} \quad (۰/۷۵)$	۹
۱/۵	<p>الف) ۱) $(x, y) R (x, y) \Rightarrow x^2 + 5y = x^2 + 5y$ (۰/۲۵) رابطه بازتابی</p> <p>۲) $(x, y) R (z, t) \Rightarrow (z, t) R (x, y)$</p> $(x, y) R (z, t) \Rightarrow x^2 + 5y = z^2 + 5t \Rightarrow z^2 + 5t = x^2 + 5y \Rightarrow (z, t) R (x, y)$ <p>(۰/۲۵) رابطه تقارنی</p> <p>۳) $(x, y) R (z, t), (z, t) R (e, f) \Rightarrow (x, y) R (e, f)$</p> $\left. \begin{aligned} (x, y) R (z, t) &\Rightarrow x^2 + 5y = z^2 + 5t \\ (z, t) R (e, f) &\Rightarrow z^2 + 5t = e^2 + 5f \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + 5y = e^2 + 5f \Rightarrow (x, y) R (e, f)$ <p>(۰/۵) رابطه تعدی</p> <p>ب) $[(-1, 2)] = \{(x, y) \mid (x, y) R (-1, 2)\} \quad (۰/۲۵)$</p> $x^2 + 5y = (-1)^2 + 5 \times 2$ $x^2 + 5y = 11$ $x^2 + 5y - 11 = 0 \quad (۰/۲۵)$	۱۰
« ادامه در صفحه ی سوم »		

ساعت شروع : ۱۰:۳۰ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان : ۱۳۸۹ / ۱۰ / ۱۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۸۹

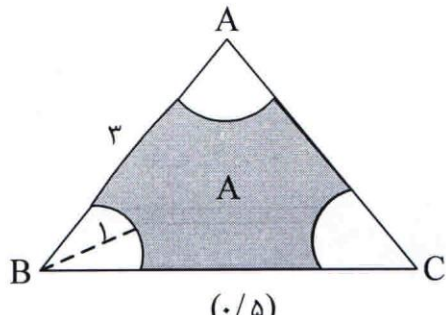
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	<p>الف) $B - (A \cup C)$ (۰/۲۵)</p>  <p>(۰/۲۵)</p> <p>ب) $A \cap B \cap C$ (۰/۲۵)</p>  <p>(۰/۲۵)</p>	۱۱
۱	<p>$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4)\}$ (۰/۷۵)</p> <p>$B = \{(1, 4)\}$ (۰/۲۵)</p>	۱۲
۱/۵	<p>$p(a) = \frac{1}{7}$ (۰/۲۵) , $p(a) + p(b) = 1$ (۰/۵) $\Rightarrow \frac{1}{7} p(b) + p(b) = 1 \Rightarrow$</p> <p>$p(b) = \frac{7}{8}$ (۰/۲۵) و $p(a) = \frac{1}{8}$ (۰/۲۵)</p> <p>$A = 3p(a) + \frac{1}{2} p(b) = \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = \frac{13}{16}$ (۰/۲۵)</p>	۱۳
۱/۵	<p>$P(A) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{7^4}$ (۰/۵) صورت کسر هر قسمت (۰/۲۵) و مخرج کسر (۰/۵)</p>	۱۴
« ادامه در صفحه ی چهارم »		

ساعت شروع: ۱۰:۳۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۱۰ / ۱۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۸۹

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱	$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{2^5}$	صورت کسر (۰/۵) و مخرج کسر (۰/۵)	۱۵
---	-----------------------------------	---------------------------------	----

۱/۵	 <p style="text-align: center;">(۰/۵)</p>	$P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$	۱۶
-----	--	---	----

۱/۵	$P(A' \cap B') = p(A \cup B)' = 1 - p(A \cup B) =$ <p style="text-align: center;">(۰/۵) (۰/۵)</p> $1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)$ <p style="text-align: center;">(۰/۵)</p>		۱۷
-----	---	--	----

۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »	
----	----------	----------------	--