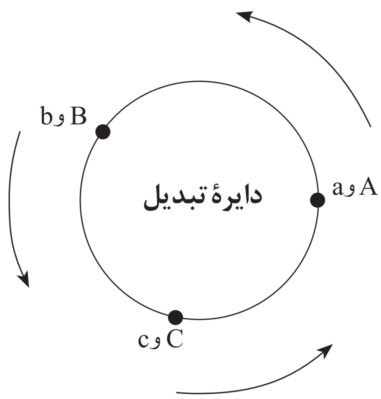
دایرهٔ تبدیل و کاربرد آن در ساده‌کردن عبارت‌های جبری

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: دایرهٔ تبدیل، ساده کردن کسرها

اگـر روی پیرامـون یک دایره، سـه نقطه بـه نام‌های a، b، c یا A، B و C مانند شکل ۱ در نظر بگیریم و در جهت دایرهٔ مثلثاتی روی پیرامون دایره حرکت کنیم، از a به b و از b به c و از c به a می‌رسیم.



از این خاصیت، هم در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث در مثلثات و هندسه اسـتفاده می‌کنیم و هم در ساده‌کردن کسرهای تبدیلی. برای مثال، در مثلث ABC به اضلاع a و b و c داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

حال اگـر در این فرمول به جای a، b و به جای b، c و به جای c، a قرار دهیم خواهیم داشت:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

اینـک اگر در این فرمول a را بـه b و b را به c و c را به a تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

تذکر: از این خاصیت در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث، چه در هندسـه و چه در مثلثات می‌توان استفاده کرد؛ مثل فرمول‌های سه ارتفاع و فرمول‌های سه میانه.

کاربرد دایرهٔ تبدیل در ساده‌کردن کسرها

مسئلهٔ ۱. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P = \frac{2a^2 + b^2 + 3ab - ac - bc}{a+b} + \frac{2a^2 + c^2 + 3bc - ba - ca}{b+c} + \frac{2c^2 + a^2 + 3ca - cb - ab}{c+a}$$

حل: اگـر برای یافتن حاصل عبارت فوق مخرج مشـترک بگیریم، عبارت صورت، خیلی مفصل، و احتمال اشتباه هم زیاد خواهد شد. وقت زیادی را هم خواهد گرفت. اگر توجه کنیم، کسر دومی تبدیل کسر اولی و کسر سومی تبدیل کسر دومی اسـت. بنابراین فقط کسر اولی را ساده و جواب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{کسر اول} = \frac{2a^2 + b^2 + 3ab - ac - bc}{a+b}$$

$$= \frac{2a^2 + 2ab + b^2 + ab - ac - bc}{a+b}$$

$$= \frac{2a(a+b) + b(a+b) - c(a+b)}{a+b}$$

$$= \frac{(a+b)(2a+b-c)}{a+b} = 2a + b - c$$

چون کسر دومی تبدیل کسر اولی است، پس جواب کسر

دومی هم تبدیل جواب کسر اولی است. به همین ترتیب، چون کسر سومی تبدیل کســـر دومی است، در نتیجه جواب کسر سومی هم تبدیل جواب کسر دومی است.

حاصل کسر اولی $= ۲a + b - c$

حاصل کسر دومی $= ۲b + c - a$

حاصل کسر سومی $= ۲c + a - b$

$\Rightarrow$ مجموع سه کسر $= ۲a + ۲b + ۲c = ۲(a + b + c)$

مسئلهٔ ۲. اگر: $a + b + c = ۰$، ولی a، b و c مخالف صفر باشند، ثابت کنید:

$$\frac{b+c}{bc}(b^۲ + c^۲ - a^۲) + \frac{c+a}{c.a}(c^۲ + a^۲ - b^۲) + \frac{a+b}{a.b}(a^۲ + b^۲ - c^۲) = ۰$$

حل: با کمی دقت متوجه می‌شـــویم، عبارت دومی تبدیل عبارت اولی و عبارت سومی تبدیل کسر دومی است. پس ابتدا کسر اولی را ساده می‌کنیم:

در فرض داریم $a + b + c = ۰ \Rightarrow b + c = -a$

کسر اولی $= \frac{b+c}{bc}(\underbrace{b^۲ + c^۲} - a^۲) = \frac{-a}{bc}((b + c)^۲ - ۲bc - a^۲)$

$= \frac{-a}{bc}((-a^۲) - ۲bc - a^۲) = \frac{-a}{bc}(a^۲ - ۲bc - a^۲)$

$= \frac{-a}{bc}(-۲bc) = ۲a$

چون کســـر دوم تبدیل یافتهٔ کسر اول است، پس جواب کسر دوم ۲b و جواب کسر سوم ۲c خواهد شد. بنابراین:

عبارت مسئله $= ۲a + ۲b + ۲c = ۲(a + b + c) = ۲(۰) = ۰$

مســـئلهٔ ۳. اگر a، b و c مخالف صفر، و $a + b + c = ۰$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت P را بیابید.

$$P = \frac{۱}{a^۲ + b^۲ - c^۲} + \frac{۱}{b^۲ + c^۲ - a^۲} + \frac{۱}{c^۲ + a^۲ - b^۲}$$

حل: در این مسئله هم کسر دوم تبدیل کسر اول و کسر سوم تبدیل کسر دوم است، پس:

کسر اول $= \frac{۱}{a^۲ + b^۲ - c^۲}, \; a + b + c = ۰ \Rightarrow a + b = -c$

کسر اول $= \frac{۱}{(a + b)^۲ - ۲ab - c^۲} = \frac{۱}{(-c)^۲ - ۲ab - c^۲}$

$= \frac{۱}{c^۲ - ۲ab - c^۲} = \frac{۱}{-۲ab}$

کسر اول $= \frac{-۱}{۲ab}$

کسر دوم $= \frac{-۱}{۲bc}$

کسر سوم $= \frac{-۱}{۲ca}$

$\Rightarrow$ مجموع سه کسر $= \frac{-۱}{۲ab} + \frac{-۱}{۲bc} + \frac{-۱}{۲ca} = \frac{-c - a - b}{۲abc}$

$= \frac{-\overbrace{(a + b + c)}^{۰}}{۲abc} = ۰$