باسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۸/۳۰ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی			تاریخ امتحان : ۱۰ / ۱۰/ ۱۳۹۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰			**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	سوالات	نمره
۱	**اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$ داشته باشیم $۰ \le x < \varepsilon$، ثابت کنید که $x = ۰$**	۱
۲	**اگرمجموعه ی $A = \{x \mid \lvert ۷-۳x \rvert < ۲\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، مقدار $a+r$ را تعیین کنید.**	۱
۳	**در دنباله ی $\{\frac{۴n+۱}{۲n-۵}\}$ برای چه مقادیر n، $۱/۹۹ < \frac{۴n+۱}{۲n-۵} < ۲/۰۱$ می باشد؟**	۱/۵
٤	**ثابت کنید دنباله ی $\{۲+\frac{(-۱)^n}{n}\}$ غیر یکنوا و همگراست.**	۱/۵
۵	**همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی نمایید و در صورت همگرایی، مجموع سری را محاسبه کنید.** الف) $\sum_{k=۱}^{+\infty} \frac{۲k+۱}{(k^۲+۱)(k^۲+۲k+۲)}$ ب) $\sum_{k=۱}^{+\infty} \frac{۳k-۱}{۳k}$ ج) $\sum_{k=۱}^{+\infty} \frac{۲^{k+۱}}{۶^k}$	۲/۵
٦	**با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید: $\lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲-۳}{x-۱} = ۶$.**	۱/۵
۷	**ثابت کنید تابع $f(x) = \sin\frac{۱}{x}$ در نقطه ی $x = ۰$ حد ندارد.**	۱/۵
۸	**حدود توابع زیر را بدون هم ارزی و قاعده ی هوپیتال محاسبه کنید.** الف) $\lim_{x\to ۳} (x^۲-۹)\times\cos\frac{۱}{x-۳}$ ب) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۲}{x-۳}$ ج) $\lim_{x\to -\infty} \frac{۲x-\sqrt{۹x^۲-۴x+۱}}{۶x-۱}$	۲/۲۵
۹	**حدود m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه های معادله ی $mx^۲-۴x-۲m+۳=۰$ در بازه ی $[-۱,۱]$ باشد.**	۱/۵
۱۰	**نقاط ناپیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲}{x-۶} & x < ۵ \\ \sqrt{x-۵} & x \ge ۵ \end{cases}$	۰/۷۵
۱۱	**معادله ی کلیه ی مجانب های منحنی $y = \frac{x^۲-x+۱}{x-۱}$ را بنویسید.**	۱
۱۲	**قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه ی a مشتق پذیر باشند، ثابت کنید:** $(f.g)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$	۱/۵
۱۳	**مشتق پذیری تابع رو به رو را در $x=۱$ بررسی کنید.** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x-۱} & x \ne ۱ \\ ۲ & x = ۱ \end{cases}$	۱/۲۵
۱٤	**اگر $f(x) = \sqrt{x^۲-۳x}$ ، $g'(x) = \frac{x+۳}{x-۱}$ و $F = gof$ باشند، حاصل $F'(۴)$ را تعیین کنید.**	۱/۲۵
	موفق باشید. **جمع نمره**	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰قیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۰ / ۱۰/ ۱۳۹۰**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	اگر $x = ۰$ که حکم برقرار است (۰/۲۵). حال فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) یعنی $x \neq ۰$. لذا $x > ۰$ چون عبارت برای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار است، قرار می دهیم $\varepsilon = x$ (۰/۲۵). در نتیجه $۰ \le x < x$(۰/۲۵).که این تناقض است پس فرض خلف باطل است، یعنی $x = ۰$(۰/۲۵).	۱
۲	$\lvert ۷-۳x\rvert<۲ \Rightarrow ۳\lvert x-\frac{۷}{۳}\rvert<۲$ (۰/۲۵) $a=\frac{۷}{۳}$ (۰/۲۵) , $r=\frac{۲}{۳}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a+r=۳$ (۰/۲۵)	۱
۳	$۱/۹۹-۲<\frac{۴n+۱}{۲n-۵}-۲<۲/۰۱-۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow -۰/۰۱<\frac{۱۱}{۲n-۵}<۰/۰۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lvert\frac{۱۱}{۲n-۵}\rvert<۰/۰۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲n-۵>۱۱۰۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n>\frac{۱۱۰۵}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n\ge ۵۵۳$ (۰/۲۵)	۱/۵
٤	$\frac{-۱}{n}\le\frac{(-۱)^n}{n}\le\frac{۱}{n}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲-\frac{۱}{n}\le ۲+\frac{(-۱)^n}{n}\le ۲+\frac{۱}{n}$ (۰/۲۵) $\lim\limits_{n\to+\infty} ۲-\frac{۱}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty} ۲+\frac{۱}{n}=۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} ۲+\frac{(-۱)^n}{n}=۲$ (۰/۲۵) دنباله همگراست $a_n :۱,\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۳},\frac{۹}{۴},\dots$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ دنباله غیر یکنواست (۰/۲۵)	۱/۵
۵	الف) $s_n=\underbrace{\sum_{k=۱}^{n}\frac{۲k+۱}{(k^۲+۱)((k+۱)^۲+۱)}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\sum_{k=۱}^{n}(\frac{۱}{k^۲+۱}-\frac{۱}{(k+۱)^۲+۱})}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{(n+۱)^۲-۱}$ (۰/۲۵) $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\frac{۱}{۲} \Rightarrow$ (۰/۲۵) سری همگرا به $\frac{۱}{۲}$ ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۳n-۱}{۳n}=۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ (۰/۲۵) سری واگراست. ج) (سری هندسی) $a=\frac{۲}{۳}$ (۰/۲۵) , $q=\frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\lvert q\rvert<۱\ (۰/۲۵)} S=\frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=۱^{(۰/۲۵)}$ سری به ۱ همگراست	۲/۵
٦	$\forall\varepsilon>۰ , \exists\ \delta>۰ \ni ۰<\lvert x-۱\rvert<\delta \Rightarrow \lvert\frac{۳x^۲-۳}{x-۱}-۶\rvert<\varepsilon$ (۰/۵) $\lvert\frac{۳x^۲-۳}{x-۱}-۶\rvert<\varepsilon \Rightarrow \lvert\frac{۳x^۲-۶x+۳}{x-۱}\rvert<\varepsilon$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۳\lvert x-۱\rvert<\varepsilon$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lvert x-۱\rvert<\frac{\varepsilon}{۳}$ (۰/۲۵) کافیست $\delta\le\frac{\varepsilon}{۳}$ باشد. (۰/۲۵)	۱/۵
۷	$\begin{cases} a_n=\frac{۱}{۲n\pi} \\ b_n=\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}} \end{cases}$ (۰/۵) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=۰ , \forall n\in N\ a_n,b_n\neq ۰$ (۰/۲۵) $f(a_n)=\sin(۲n\pi)=۰$, $f(b_n)=\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=۱$ (۰/۲۵) , $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=۰$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(b_n)=۱$ (۰/۲۵) چون دو دنباله ی $\{f(a_n)\}$, $\{f(b_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرایند، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد . (۰/۲۵)	۱/۵

ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۲۰قیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۱۰ /۱۰ / ۱۳۹۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	الف) $\lim_{x\to ۳}(x^{۲}-۹)=۰$ (۰/۲۵), $\lvert\cos\frac{۱}{x-۳}\rvert\le ۱$ (۰/۲۵) کراندار $\Rightarrow \lim_{x\to ۳}(x^{۲}-۹)\cos\frac{۱}{x-۳}=۰$ (۰/۲۵) ب) $\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۲}{x-۳}=\underset{(۰/۲۵)}{\lim_{x\to ۳^-}\frac{۲-۲}{x-۳}}=۰$ (۰/۲۵) ج) $\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-\lvert x\rvert\sqrt{۹-\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}}}{x(۶-\frac{۱}{x})}}_{(۰/۵)}=\underset{(۰/۲۵)}{\lim_{x\to-\infty}}\frac{۲x+۳x}{۶x}=\frac{۵}{۶}$ (۰/۲۵)	۲/۲۵
۹	تابع f در بازه ی $[-۱,۱]$ پیوسته است (۰/۲۵) و $f(-۱)=-m+۷$ (۰/۲۵) و $f(۱)=-m-۱$ (۰/۲۵). طبق قضیه ی مقدار میانی داریم : $\underbrace{f(-۱)\times f(۱)<۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{(-m+۷)(-m-۱)<۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow -۱<m<۷$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۰	$\lim_{x\to ۵^-}f(x)=\lim_{x\to ۵^-}\frac{x^{۲}}{x-۶}=-۲۵$ (۰/۲۵) , $\lim_{x\to ۵^+}f(x)=\lim_{x\to ۵^+}\sqrt{x-۵}=۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ تابع در نقطه ی ۵ناپیوسته است. (۰/۲۵)	۰/۷۵
۱۱	مجانب افقی ندارد. (۰/۲۵) $x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x\to ۱\\ y\to\infty\end{cases}\Rightarrow$ (۰/۲۵) مجانب قائم $x=۱$ $x^{۲}-x+۱=x(x-۱)+۱\Rightarrow$ (۰/۲۵) مجانب مایل $y=x$ (۰/۲۵)	۱
۱۲	چون f و g در a مشتق پذیرند داریم: $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ (۰/۲۵) , $\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a)$ (۰/۲۵) $(f.g)'(a)=\underbrace{\lim_{h\to ۰}\frac{(f.g)(a+h)-(f.g)(a)}{h}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}}_{(۰/۲۵)}$ $=\underbrace{\lim_{h\to ۰}(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times g(a+h)+f(a)\times\frac{g(a+h)-g(a)}{h})}_{(۰/۲۵)}=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۳	$f'(۱)=\underset{(۰/۲۵)}{\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}-۲}{x-۱}}=\underset{(۰/۲۵)}{\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}-۲x+۱}{(x-۱)^{۲}}}=\underset{(۰/۲۵)}{\lim_{x\to ۰}\frac{(x-۱)^{۲}}{(x-۱)^{۲}}}=۱$ (۰/۲۵) تابع در $x=۱$ مشتق پذیر است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱٤	$f'(x)=\frac{۲x-۳}{۲\sqrt{x^{۲}-۳x}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(۴)=\frac{۵}{۴}$ (۰/۲۵) , $g'(f(۴))=g'(۲)=۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\underbrace{F'(۴)=f'(۴)\times g'(f(۴))}_{(۰/۲۵)}=\frac{۲۵}{۴}$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	۲۰