Language: **Persian (Farsi)** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

چهارشنبه، ۱۶ جولای ۲۰۰۸ به نام او

مساله ۱. در مثلث حاده الزاویه ABC، H مرکز ارتفاعی است. دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط BC، خط BC را در A_1 و A_2 قطع می‌کند. به طور مشابه دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط AC، خط AC را در B_1 و B_2 قطع می‌کند و دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط AB، خط AB را در C_1 و C_2 قطع می‌کند. نشان دهید A_1، A_2، B_1، B_2، C_1 و C_2 روی یک دایره هستند.

مساله ۲. الف) نشان دهید نامساوی $\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$ برای هر سه عدد حقیقی x,y,z مخالف یک و با شرط $xyz=1$ برقرار است.

ب) نشان دهید تساوی برای بینهایت سه تایی x,y,z از اعداد ***گویای*** مخالف یک با شرط $xyz=1$ رخ می دهد.

مساله ۳. نشان دهید تعداد اعداد طبیعی مانند n به طوری که n^2+1 عامل اولی بزرگتر از $2n+\sqrt{2n}$ دارد نامتناهی است.

www.irysc.com

مرجع آموزش المپیادهای علمی ایران

زمان: ۴ ساعت و نیم

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

پنج شنبه، ۱۷ جولای ۲۰۰۸ به نام او

مساله ۴. تمام توابع $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ را بیابید به طوری که برای هر w,x,y,z مثبت با شرط $wx=yz$ داشته باشیم

$$\frac{f(w)^2+f(x)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

مساله ۵. دو عدد طبیعی n و k با زوجیت یکسان و شرط $k\geq n$ داده شده اند. فرض کنید $2n$ لامپ با شماره های $1,2,\ldots,2n$ داریم که هر کدام می توانند روشن یا خاموش باشند و در ابتدا همه لامپ ها خاموش هستند. منظور از دنباله، دنباله ای متشکل از چند مرحله است که در هر مرحله دقیقا یکی از لامپ ها را تغییر وضعیت می دهیم (از روشن به خاموش یا از خاموش به روشن).

N را تعداد دنباله های k_مرحله ای بگیرید که پس از انجام آن k مرحله، وضعیت لامپ های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ های $n+1$ تا $2n$ خاموش باشد. متناظرا M را تعداد دنباله های k_مرحله ای بگیرید که پس از انجام آن k مرحله، وضعیت لامپ های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ های $n+1$ تا $2n$ خاموش باشد با این محدودیت که وضعیت لامپ های $n+1$ تا $2n$ را در هیچ مرحله ای تغییر ندهیم. حاصل $\dfrac{N}{M}$ را بیابید.

مساله ۶. فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب با شرط $AB\neq BC$ باشد. دایره های محاطی مثلث های ABC و ADC را به ترتیب با ω_1 و ω_2 نشان می دهیم. فرض کنید دایره‌ی ω وجود داشته باشد به طوری که بر امتداد BA از طرف A و بر امتداد BC از طرف C مماس باشد و همچنین بر خطوط AD و CD نیز مماس باشد. ثابت کنید مماس های خارجی مشترک دو دایره ω_1 و ω_2 با یکدیگر روی ω برخورد می کنند.

www.irysc.com
مرجع آموزش المپیادهای علمی ایران

زمان: ۴ ساعت و نیم

بارم هر سؤال ۷ نمره است.