

چهارشنبه، ۱۵ جولای ۲۰۰۹

سوال ۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) اعدادی صحیح متمایز از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشند که برای $i = 1, \dots, k-1$ بر $a_i(a_{i+1} - 1)$ بخش پذیر است. ثابت کنید که $a_k(a_1 - 1)$ بر n بخش پذیر نیست.

سوال ۲. فرض کنید ABC یک مثلث با مرکز دایره محیطی O باشد. نقاط P و Q به ترتیب نقاط داخلی اضلاع AB و AC می باشند. همچنین فرض کنید K, L, M به ترتیب وسط‌های BP, CQ, AP باشند و Γ دایره‌ای باشد که از نقاط K, L, M می‌گذرد. فرض کنید خط PQ بر دایره Γ مماس باشد. ثابت کنید $OP = OQ$.

سوال ۳. فرض کنید که s_1, s_2, s_3, \dots دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که زیر دنباله‌های

$$s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots \quad \text{و} \quad s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots$$

هر دو تصاعد حسابی هستند. ثابت کنید که دنباله s_1, s_2, s_3, \dots نیز یک تصاعد حسابی است.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر سوال ۷ امتیاز دارد

پنجشنبه، ۱۶ جولای ۲۰۰۹

سوال ۴. فرض کنید ABC یک مثلث باشد که $AB = AC$. نیمسازهای $\angle CAB$ و $\angle ABC$ اضلاع BC و CA را به ترتیب در D و E را قطع می‌کنند. فرض کنید K مرکز دایره محاطی مثلث ADC باشد. فرض کنید $\angle BEK = 45^\circ$. تمام مقادیر ممکن برای زاویه $\angle CAB$ را بیابید.

سوال ۵. تمام توابع f از مجموعه اعداد صحیح مثبت به مجموعه اعداد صحیح مثبت را بیابید که برای هر دو عدد صحیح و مثبت a و b ، یک مثلث ناتبهگون با اضلاع

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1)$$

وجود داشته باشد. (یک مثلث ناتبهگون مثلثی است که رئوس آن هم خط نیستند)

سوال ۶. فرض کنید که a_1, a_2, \dots, a_n اعداد صحیح مثبت و متمایز باشند و M مجموعه‌ای از $n - 1$ عدد صحیح مثبت است که شامل عدد $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ نیست. یک ملخ قرار است که با شروع از نقطه o در مسیر محور اعداد حقیقی بپرد و n پرش به طول‌های a_1, a_2, \dots, a_n به سمت راست و با یک ترتیب خاص انجام دهد. ثابت کنید این ترتیب را می‌توان طوری انتخاب کرد که ملخ هیچ‌گاه روی نقطه‌ای از M فرود نیاید.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر سوال ۷ امتیاز دارد